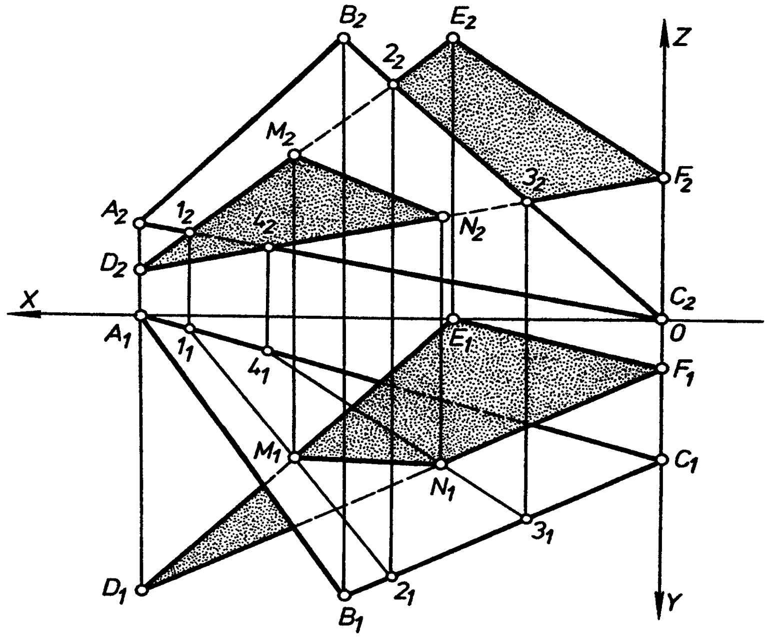
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

ПРАКТИКУМ
з нарисної геометрії



НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України

Харків
ХНУМГ
2014

УДК 514.182(075)
ББК 30.11я73-6
П69

Рецензент:
Тормосов Ю.М., д. техн. н., професор, завідувач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки Харківського державного університету харчування та торгівлі

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів
електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів
(Рішення 1/11-18628 від 03.12.12)

Лусь В. І.

П69 **Практикум** з нарисної геометрії: навчальний посібник / В. І. Лусь, Т. Є. Киркач, О. Є. Мандріченко, А. О. Радченко; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Х. : ХНУМГ, 2014. – 118 с.

ISBN 978-966-695-310-3

У навчальному посібнику наведено короткі теоретичні відомості з кожної теми курсу нарисної геометрії, надані приклади розв'язання типових задач, питання та вправи для самоперевірки.

Посібник складається з чотирьох частин. Перші три частини охоплюють основні розділи нарисної геометрії, які відповідають змістовим модулям навчальної програми з інженерної графіки. Четвертий розділ – карти самоконтролю і питання для самоперевірки.

Посібник має на меті дати достатній і різноманітний матеріал для практичних аудиторних та індивідуальних занять.

УДК 514.182(075)
ББК 30.11я73-6

© В. І. Лусь, Т. Є. Киркач,
О. Є. Мандріченко, А. О. Радченко, 2014
ISBN 978-966-695-310-3
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вивчення інженерної графіки має велике значення в творчій діяльності інженера будь-якої спеціальності. Значення нарисної геометрії, яка є одним із розділів інженерної графіки як в техніці, так і в інших сферах діяльності, підтверджується широким застосуванням методів зображень в креслярсько-конструкторських роботах, в архітектурі, будівництві, в машинній графіці і в багатьох інших розрахунково-графічних роботах.

«Практикум з нарисної геометрії» є першою спробою викладачів кафедри інженерної та комп'ютерної графіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова створити навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей, де курс нарисної геометрії вивчається найбільш повно.

Практикум буде корисним також студентам інших факультетів і спеціальностей.

Навчальний посібник «Практикум з нарисної геометрії» належить використовувати в комплекті з підручниками, перелік яких наводиться в кінці кожної частини практикуму, він також буде корисним для роботи і з будь-якими іншими підручниками та навчальними посібниками з нарисної геометрії.

Практикум складається з чотирьох частин: перші три частини охоплюють курс нарисної геометрії відповідно до навчальних планів електротехнічних спеціальностей з цієї дисципліни, а також відповідають розділам зазначених підручників.

В першій частині «Комплексний кресленик точки, прямої, площини» студент складає уявлення з теорії параметризації, знайомиться з системою ортогонального проєціювання та набуває навичок складання комплексних креслеників.

Друга частина «Позиційні та метричні задачі» призначена для закріплення теоретичного матеріалу і придбання навичок у розв’язуванні названих задач.

Форма більшості найбільш складних і відповідальних оригінальних деталей машин і приладів, а також будівельних конструкцій утворена в просторі так, що поверхні їх перетинаються між собою. Тому важливим етапом конструювання таких деталей є визначення меж елементарних вихідних поверхонь, якими і є їх лінії взаємного перетину.

Враховуючи це, третя частина «Взаємний перетин поверхонь. Розгортки. Аксонометричні проекції» має на меті вивчення способів побудови лінії взаємного перетину поверхонь та закріплення навиків у виконанні розгорток поверхонь і аксонометричних проекцій. Всі кресленики в наведених прикладах даються в динаміці, тобто у певній послідовності розв’язування.

Кожний, хто навчається, одержує необхідні для розв'язання задачі дані за активним запитом, бо це здійснюється в ідеальному учбовому процесі «один на один» (учень – хороший вчитель).

Четверта частина – це самоконтролер для перевірки якості засвоєного матеріалу і виділення з нього найважливішого та істотного. Пропонується 26 карт систематизованого матеріалу з курсу нарисної геометрії. Після прослуховування лекції або вивчення теми за підручником треба перевірити засвоєння матеріалу по карті самоконтролю з даної теми самоконтролю.

У кінці посібника складений українсько-російський словник деяких геометричних термінів, що полегшить роботу з літературними джерелами різних років видань.

Тобто навчальний посібник «Практикум з нарисної геометрії» має на меті дати достатній і різноманітний матеріал для практичних аудиторних та індивідуальних самостійних занять і цим сприяти кращому засвоєнню теоретичних основ нарисної геометрії та набуття практичного досвіду в розв'язуванні задач з нарисної геометрії.

Посібник рекомендується для студентів усіх форм навчання, ним можуть користуватись також ті, хто вивчає нарисну геометрію самостійно.

Автори щиро вдячні рецензентам за корисні зауваження і за допомогу в підготовці рукопису до друку.

ЧАСТИНА 1
КОМПЛЕКСНИЙ КРЕСЛЕНИК ТОЧКИ, ПРЯМОЇ, ПЛОЩИНИ

Література	[1]	[8]	[9]	[12]	[7]
Розділ глава §§	II §§9-11,14,15 III §§16-19	2 §§2.1-2.3 3 §§3.1-3.4	1,2§§4-6 3 §§7-13 4 §§14-18	I, §§1.1-1.5 II, §§2.1-2.4 III, §§3.1-3.4	I тема

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називають прямокутними координатами точки?
2. Що позначає термін «ортогональні проекції»?
3. Яке положення займає точка в просторі, якщо її фронтальна проекція розташована на осі проекцій OZ?
4. Яке положення займає точка в просторі, якщо її горизонтальна проекція розташована на осі проекцій OX?
5. Яке положення займає точка в просторі, якщо її профільна проекція розташована на осі проекцій OY?
6. Де розташована профільна проекція точки, якщо її горизонтальна і фронтальна проекції належать осі проекцій OX?
7. Яка пряма називається прямою загального положення (висхідною, спадною)?
8. Як називається пряма, фронтальна проекція якої паралельна до осі OX?
9. У якої прямої горизонтальна проекція паралельна до осі проекцій OX і як ця пряма називається?
10. У якої прямої горизонтальна і фронтальна проекції розташовані на одній лінії проекційного зв'язку?
11. У якої прямої горизонтальна і фронтальна проекції паралельні до осі OX і як ця пряма називається?
12. Які необхідні і достатні умови для побудови на комплексному кресленні точки, що належить заданій прямій? Точки, що належить заданій площині?
13. Яке положення в просторі займає пряма, якщо її фронтальна проекція - точка на осі OX?
14. Яке положення в просторі займає пряма, якщо її горизонтальна проекція - точка на осі OX?
15. Яке положення в просторі займає пряма, якщо її фронтальна і горизонтальна проекції розташовані на осях OZ і *Oy* відповідно?
16. Що є ознакою паралельності і перетину двох прямих на комплексному кресленику?
17. Яке взаємне положення прямих у просторі, якщо їхні фронтальні проекції паралельні, а горизонтальні перетинаються ?
18. Чи можуть прямі, що перетинаються, мати паралельні фронтальні і горизонтальні проекції?
19. Які можливі способи завдання площини на комплексному кресленику?
20. Чи є площина, паралельна до однієї з площин проекцій, проектуючою площиною?
21. Чи можна через пряму, паралельну до осі OX, провести площину загального положення? Горизонтальну площину? Профільно-проектуючу площину?
22. У якій площині горизонталі є одночасно і фронталями?
23. Які площини можна провести через пряму, фронтальна проекція якої вироджується в точку, а горизонтальна – перпендикулярна до осі OX?

1.2 ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТОЧОК, ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Різні випадки положення точок, прямих і площин у просторі розглянуті на рис. 1,2 і 3.

Перш, ніж приступити до розв'язання задач, рекомендується уважно вивчити пропоновані кресленики.

1.3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Через точку С, що належить до осі ОХ, провести пряму ℓ, що перетинає пряму АВ, задану координатами її кінців А (80,20,10), В (30,40,40) (рис. 4).

Розв'язання. Для побудови проекцій прямої АВ необхідно знайти проекції її кінців і однойменні проекції точок з'єднати між собою.

а) Будуємо горизонтальну і фронтальну проекції точки А, для чого відкладаємо на осі X від точки 0 у відповідному масштабі широту x_a = 80 мм, це є точка A_X. Крізь точку A_x, перпендикулярно до осі ОХ, будуємо лінію проекційного зв'язку. На цій лінії відкладаємо вниз від A_x глибину Y_A = 20 мм, це є точка A_1. Від точки A_x вгору по лінії проекційного зв'язку відкладаємо Z_A = 10 мм, це є точка A_2.

б) Аналогічно будуємо проекції точки В.

в) З'єднуємо однойменні проекції точок A_2,B_2 і A_1B_1 між собою.

г) На фронтальній проекції A_2B_2 вибираємо довільну проекцію K_2 точки перетину прямих АВ і ℓ. За допомогою лінії проекційного зв'язку будуємо K_1 на A_1B_1. З'єднуємо між собою точки K_1 і C_1, K_2 і C_2 – одержуємо горизонтальну і фронтальну проекції ℓ_1 і ℓ_2 прямої ℓ.

д) Прямі АВ і ℓ перетинаються, тому що $K_1=A_1B_1\cap \ell_1$, $K_2=A_2B_2\cap \ell_2$, а K_1 і K_2 лежать на одній лінії проекційного зв'язку.

Задача 2. Побудувати горизонтальну проекцію трикутника АВС, що належить площині $\Sigma(KL\cap m)$ (рис. 5).

Розв'язання. Побудувати точку в площині – це довести, що ця точка належить прямій, яка проведена в даній площині. Отже, побудова трикутника АВС в площині Σ зводиться до побудови точок А,В, та С в площині Σ.

а) Горизонтальна проекція B_1 точки В побудована на K_1L_1 за умови розподілу K_1L_1 у тому ж відношенні, у якому точка B_2 поділяє відрізок K_2L_2. Побудова виконана в такий спосіб: із точки L_2 проводимо промінь під будь-яким кутом до відрізка K_2L_2. На цьому промені довільно вибираємо точку K_0, з'єднуємо K_0 з точкою K_2 відрізка K_2L_2. Потім із точки B_2 проводимо пряму лінію, паралельну K_2K_0, до перетину з відрізком L_2K_0 у точці B_0 ($B_2B_0 \parallel K_2K_0$) Далі, із точки L_1 відрізка K_1L_1 проводимо промінь під будь-яким кутом до цього відрізка. На цьому промені з точки L_1 відкладаємо відстань, рівну L_2K_0. Точку K_0 з'єднуємо з точкою K_1. Із точки L_1 відкладаємо на відрізку L_1K_0 відстань, рівну L_2 B_0, тобто $L_1B_0= L_2B_0$. Із точки B_0 проводимо пряму лінію паралельну K_1K_0 до перетину з відрізком K_1L_1 в точці B_1 ($B_1B_0 \parallel K_1K_0$).

Таким чином одержуємо горизонтальну проекцію B_1 точки В.

б) Визначаємо горизонтальні і фронтальні проекції точок 1 і *2.* Для визначення горизонтальної проекції C_1 точки С проводимо пряму B_12_1 до перетину з лінією проекційного зв'язку, проведеної з фронтальної проекції C_2 точки С.

в) Виконуємо аналогічні побудови для визначення горизонтальної проекції A_1 точки А.

г) З'єднавши точки A_1,B_1 і C_1, одержуємо горизонтальну проекцію трикутника АВС.

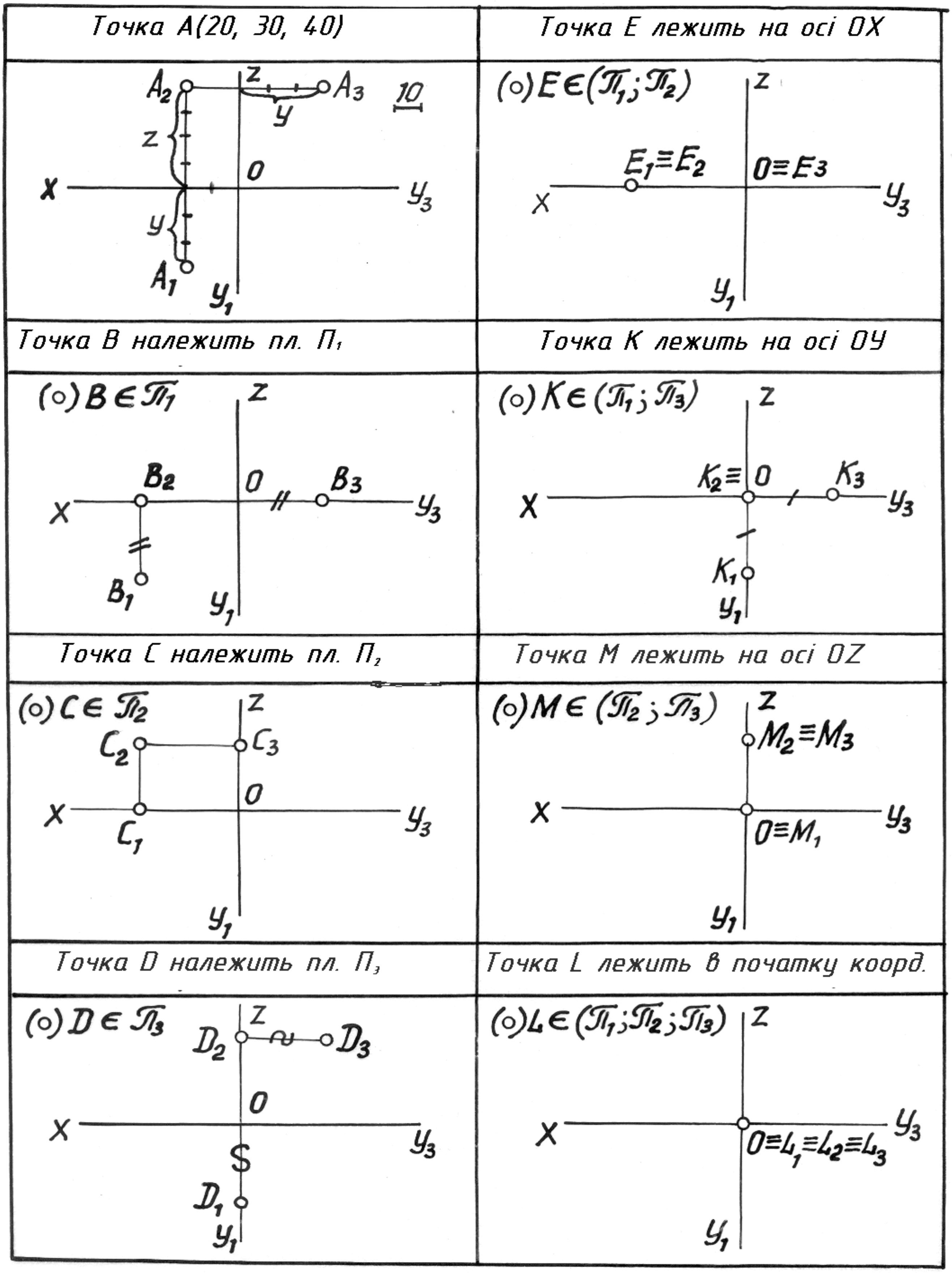

Точка A(20, 30, 40)
Точка E лежить на осі OX
A2
A3
10
Z
Y
Z
Y
X
O
Y3
A1
Y1
(o)E∈(П1;П2)
Z
E1≡E2
O≡E3
X
Y3
Y1
Точка B належить пл. П1
Точка K лежить на осі OY
(o)B∈П1
Z
B2
O
B3
X
Y3
B1
Y1
(o)K∈(П1;П3)
Z
K2≡O
K3
X
Y3
K1
Y1
Точка C належить пл. П2
Точка M лежить на осі OZ
(o)C∈П2
Z
C2
C3
O
X
Y3
C1
Y1
(o)M∈(П2;П3)
Z
M2≡M3
X
Y3
O≡M1
Y1
Точка D належить пл. П3
Точка L лежить в початку коорд.
(o)D∈П3
Z
D2
D3
O
X
Y3
D1
Y1
(o)L∈(П1;П2;П3)
Z
X
Y3
O≡L1≡L2≡L3
Y1

Рис. 1

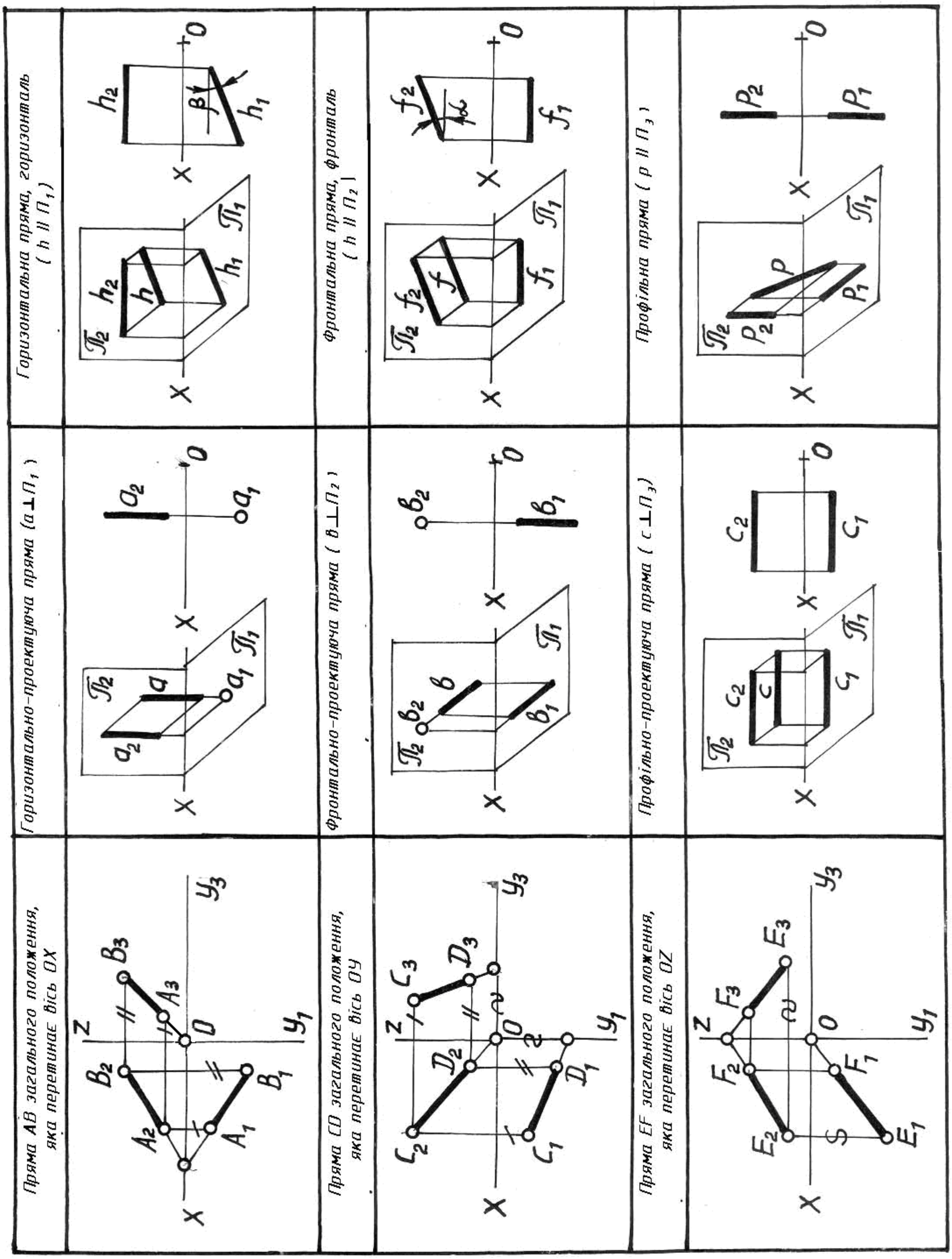

Пряма AB загального положення, яка перетинає вісь OX
Горизонтально-проектуюча пряма (a ⊥ П1)
Горизонтальна пряма, горизонталь (h ∥ П1)
Пряма CD загального положення, яка перетинає вісь OY
Фронтально-проектуюча пряма (в ⊥ П2)
Фронтальна пряма, фронталь (h ∥ П2)
Пряма EF загального положення, яка перетинає вісь OZ
Профільно-проектуюча пряма (c ⊥ П3)
Профільна пряма (p ∥ П3)

Рис. 2

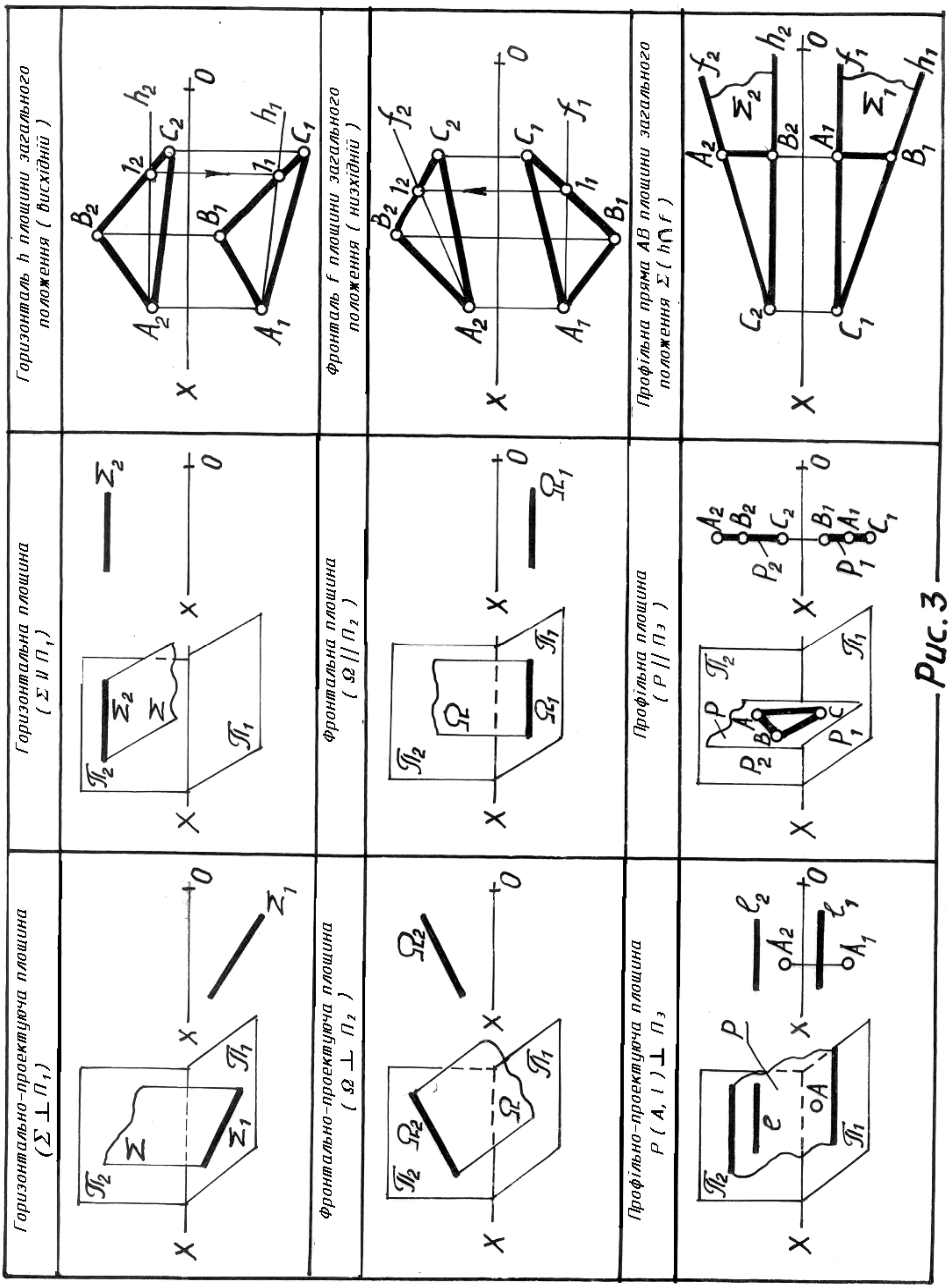

Горизонтально-проектуюча площина (Σ ⊥ П₁)
Горизонтальна площина (Σ ∥ П₁)
Горизонталь h площини загального положення (висхідні)
Фронтально-проектуюча площина (Ω ⊥ П₂)
Фронтальна площина (Ω ∥ П₂)
Фронталь f площини загального положення (низхідні)
Профільно-проектуюча площина P (A, l) ⊥ П₃
Профільна площина (P ∥ П₃)
Профільна пряма AB площини загального положення Σ (h∩f)
Рис.3

Рис. 3

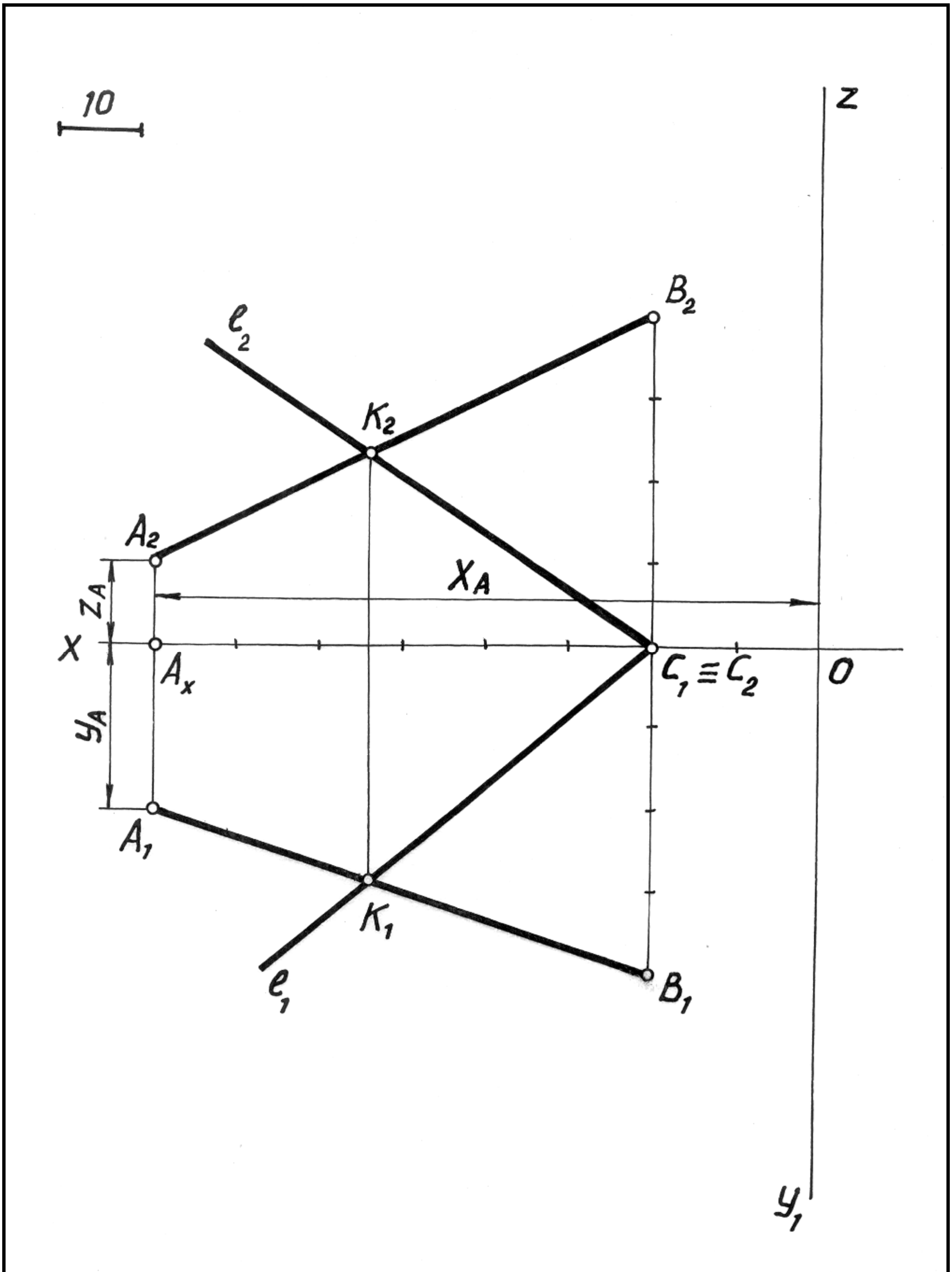


Рис. 4

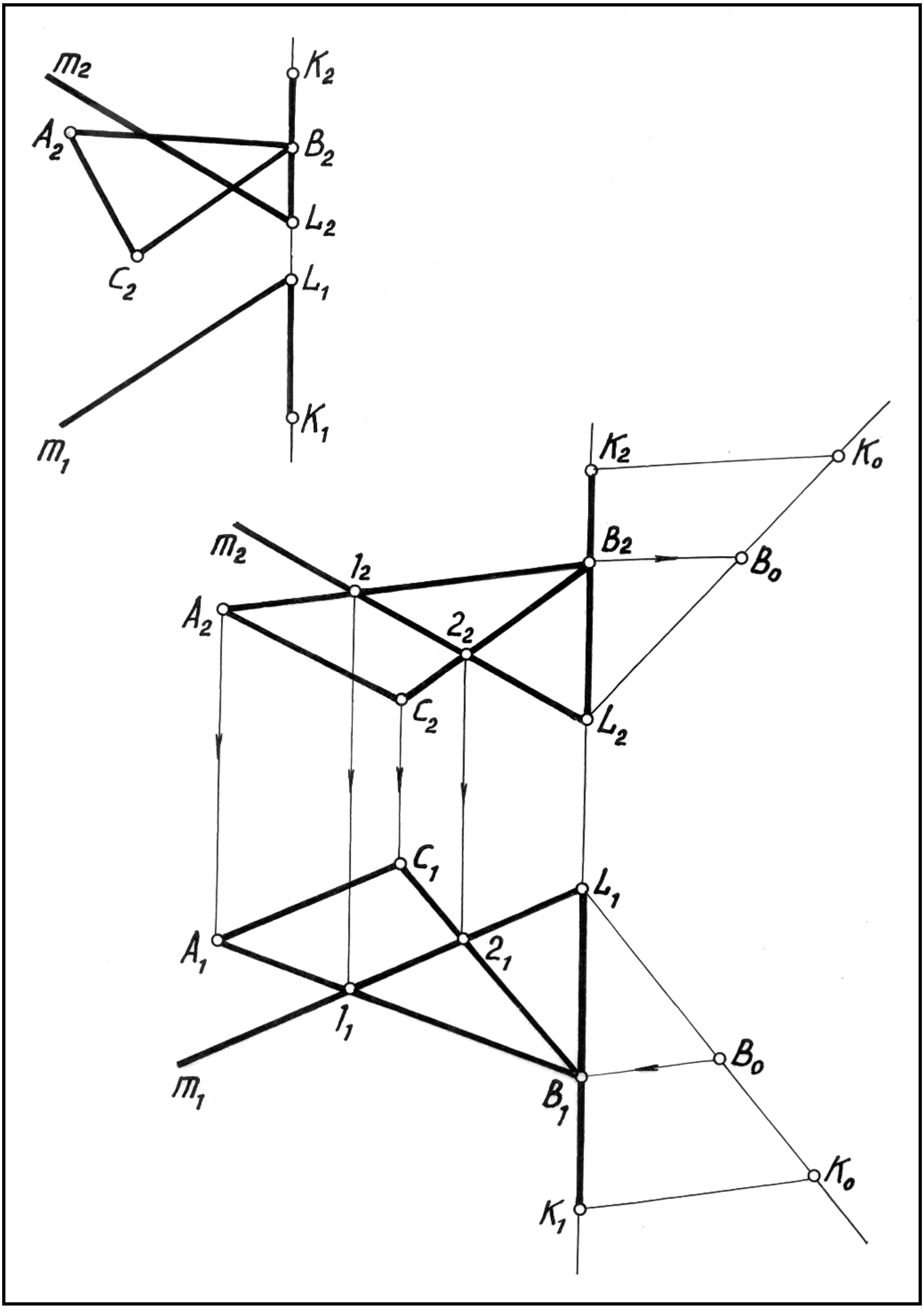

m2
K2
A2
B2
L2
C2
L1
K1
m1
K2
Ko
m2
B2
12
Bo
A2
22
C2
L2
C1
L1
A1
21
11
Bo
m1
B1
Ko
K1

Рис. 5

Задача 3. Добудувати горизонтальну проекцію плоского п'ятикутника ABCDE. Через точку К провести пряму ℓ, паралельну до горизонталі цієї площини (рис. 6).

Розв'язання. Побудова проекцій плоскої фігури заснована на умові належності точок (вершин п'ятикутника) до однієї площини. На $П_1$ площина багатокутника надана двома сторонами $A_1B_1 \cap A_1E_1$.

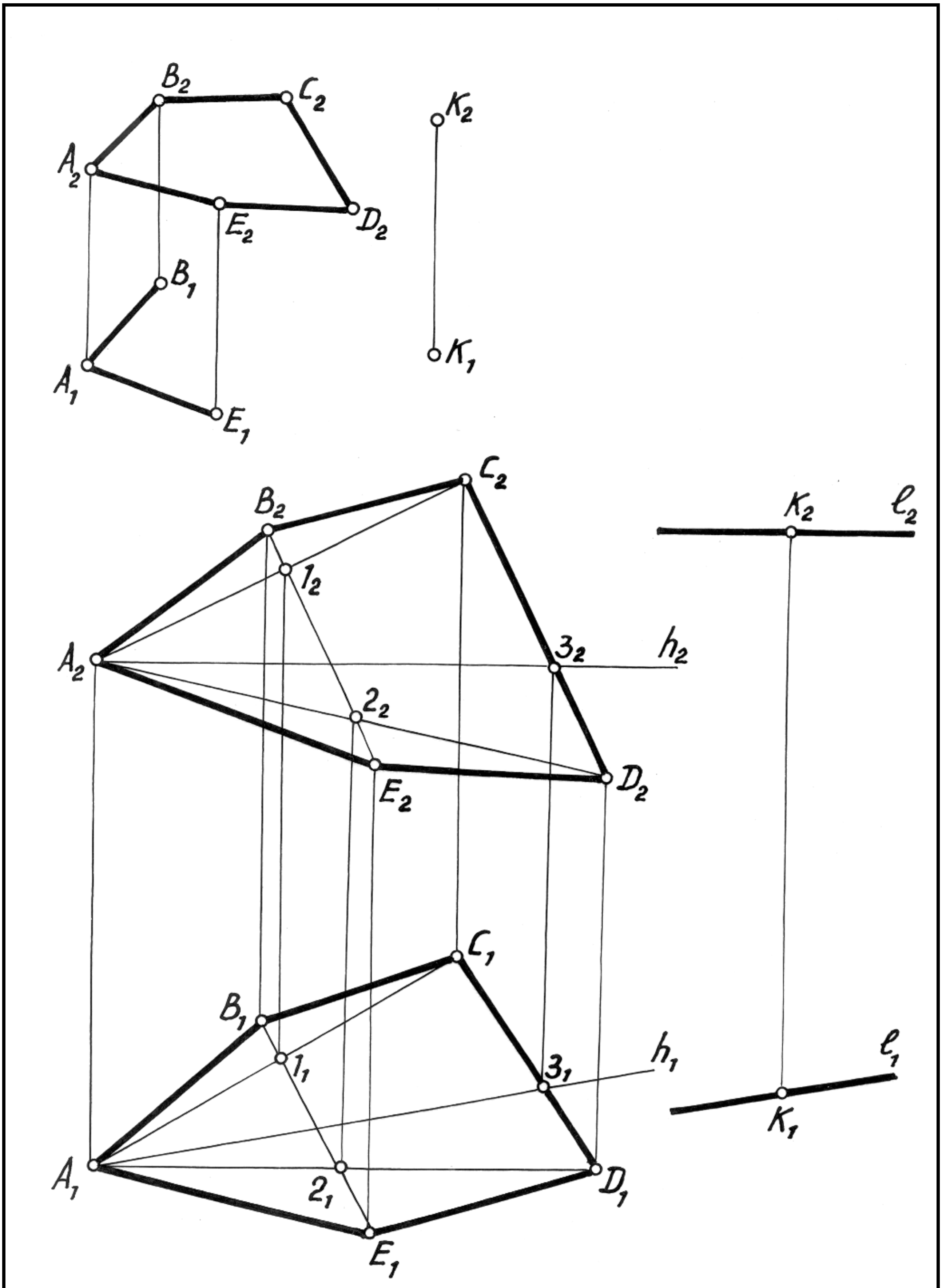
а) Проводимо допоміжну пряму BE (B_1E_1,B_2E_2). Фронтальні проекції діагоналей A_2C_2 і $A_2Д_2$ перетинаються з фронтальною проекцією B_2E_2 прямої BE у точках 1_2 і 2_2.

б) Добудовуємо проекції 1_1 і 2_1, для чого проводимо лінію проекційного зв'язку з 1_2 і 2_2 до перетину з горизонтальною проекцією B_1E_1 прямої BE.

в) Горизонтальні проекції D_1 і C_1 визначаться в точках перетину горизонтальних проекцій прямих A_11_1 і A_12_1 з відповідними лініями проекційного зв'язку, проведеними з D_2 і C_2.

г) Побудову горизонталі h починаємо з фронтальної проекції, тому що заздалегідь відомо її положення (паралельно до осі OX). Проводимо через A_2 фронтальну проекцію h_2 горизонталі h. Потім знаходимо горизонтальну проекцію 3_1 точки 3 за допомогою лінії проекційного зв'язку, проведеної з 3_2, що є точкою перетину h_2 з D_2C_2. Горизонтальну проекцію h_1 горизонталі h проводимо крізь A_1 і 3_1 .

д) Якщо прямі паралельні, то відповідно паралельні їх однойменні проекції. На підставі цього проводимо крізь точку K_2 фронтальну проекцію ℓ_2 прямої ℓ ($\ell_2 \parallel h_2$), а крізь точку K_1 горизонтальну проекцію ℓ_1 прямої ℓ ($\ell_1 \parallel h_1$).



B_2
C_2
K_2
A_2
E_2
D_2
B_1
K_1
A_1
E_1
C_2
B_2
K_2
ℓ_2
1_2
3_2
h_2
A_2
2_2
E_2
D_2
C_1
B_1
1_1
3_1
h_1
ℓ_1
K_1
A_1
2_1
D_1
E_1

Рис. 6

ЧАСТИНА 2
ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

2.1. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ, ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПЛОЩИН. ПРЯМА, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОЩИНІ. ВЗАЄМНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

Література	*[1]*	*[8]*	*[9]*	*[12]*	*[7]*
Глава ,§§	*III, §20-24*	*3, §§3.3-3.5*	*1.4. §§19-24*	*4, §§4.1-4.6*	*11 тема*

2.1.1. Запитання для самоперевірки

1. Які площини називаються проектуючими? Вкажіть властивості цих площин.
2. Як зображується на комплексному кресленні фронтально-проектуюча площина, проведена через пряму загального положення?
3. Які площини називаються площинами рівня? Вкажіть властивості цих площин.
4. Як побудувати горизонтально – проектуючу площину, паралельну до прямої загального положення?
5. По якій прямій горизонтальна площина перетинає будь-яку іншу площину? Фронтальна площина? Профільна площина?
6. У чому полягає особливість розв’язування задачі на перетин прямої з площиною окремого положення?
7. Сформулюйте алгоритм розв’язання задачі на перетин прямої з площиною загального положення.
8. Сформулюйте умову перпендикулярності прямої до площини.
9. Сформулюйте алгоритм розв’язання задачі на визначення відстані від точки до площини загального положення.
10. Назвіть умови перпендикулярності двох площин?
11. Сформулюйте умову належності прямої до площини.
12. Сформулюйте умову паралельності двох площин, прямої і площини.

2.1.2. Розв’язання деяких задач. Перетин прямої з площиною. Взаємний перетин площин

Деякі найпростіші позиційні задачі (перетин прямої з проектуючою площиною, перетин площини загального положення з проектуючою площиною) розглянуті на рис. 7:

а) у випадку перетину прямої **a** з горизонтально проектуючою площиною Σ зрозуміло, що горизонтальна проекція K_1 шуканої точки знаходиться в точці перетину виродженої проекції площини Σ_1 (її сліду) із проекцією $\mathbf{a}_1$; фронтальна проекція K_2 добудовується за допомогою лінії проекційного зв'язку;

б) у випадку перетину площини Ω(ΔABC) з горизонтально-проектуючою площиною Σ двічі розв’язується задача на перетин прямої з площиною.

Задача 1. Знайти точку перетину прямої **a** з площиною Ω(ΔABC) (рис. 9).

Відомо, що пряма лінія, яка не належить площині, може мати з нею тільки одну спільну точку.

Щоб довести на комплексному кресленні, що пряма перетинає площину, необхідно визначити їхню спільну точку і показати, що немає другої такої точки.

Алгоритм розв’язування задачі складається з трьох основних етапів:

1) $\mathbf{a}\subset\Sigma$. Проводимо через задану пряму **a** допоміжну площину Σ.

Допоміжну площину Σ обираємо горизонтально-проектуючою. Проведення проектуючої площини крізь пряму загального положення показано на рис. 8.

Якщо площина Σ проведена через пряму **а**, то на площині $П_1$ проекція $\mathbf{a}_1$ прямої **а** збігається з виродженою проекцією $Σ_1$ площини Σ.

2) [1,2] = Ω∩Σ. Будуємо лінію перетину допоміжної площини Σ із заданою площиною Ω. Площина Σ перетинає задану площину Ω по прямій [1,2], точки $1(1_1,1_2)$ і $2(2_1,2_2)$ якої визначені як точки перетину прямих АВ і АС з площиною Σ.

3) т. К = **а**∩[1,2]. Визначаємо точку перетину заданої прямої **а** з прямою [1,2]. Задана пряма **а** і побудована пряма [1,2], що належать до однієї площини Σ, перетинаються в точці $К(К_1,К_2)$. Спочатку знайдемо фронтальну проекцію $К_2$ як точку перетину $\mathbf{a}_2$ і $[1_2, 2_2]$. Горизонтальна проекція $К_1$ визначається як точка перетину проведеної із $К_2$ лінії проекційного зв'язку з проекцією $\mathbf{a}_1$ прямої **а**.

*Визначення видимості прямої **а**.*

Для визначення видимості прямої скористаємося проекційно-співпадаючими (конкуруючими) точками, що належать мимобіжним прямим (пряма **а** і сторони трикутника АВС є мимобіжними прямими). *Видимість визначається на кожній площині проекцій окремо.*

Розглянемо, наприклад, точки 5 і 2, що належать відповідно прямим **а** і АС. Спочатку відзначимо їх проекційно-співпадаючі $П_1$ проекції $5_1 \equiv 2_1$, що розташовані в місці уявного перетину горизонтальних проекцій названих прямих. Знайшовши фронтальні проекції точок 2_2 і 5_2, встановлюємо, що точка 5_2 при напрямку проектування R розташована вище, ніж точка 2_2. Отже, на площині $П_1$ точка 5_1 видима, видимою буде і частина прямої $\mathbf{a}_1$ до точки $К_1$ перетину її з площиною трикутника.

Для визначення видимості на фронтальній проекції скористаємося тим самим способом. Розглянемо конкуруючі точки 3 і 4, що належать відповідно прямим ВС і **а.** Відзначимо фронтальні проекції цих точок 3_2 і 4_2 ,які розташовані в місці уявного перетину $\mathbf{a}_2$ і $В_2С_2$.

Знайшовши горизонтальні проекції точок 3_1 і 4_1, встановлюємо, що точка 4 розташована ближче до спостерігача, якщо дивиться по напрямку Р, ніж точка 3.

Отже, на площині $П_2$ точка 4_2 видима, видимою буде і частина прямої **а** до точки $К_2$ перетину її з площиною трикутника АВС.

При визначенні видимості прямої **а** можна міркувати і трохи інакше, виходячи з того, якою є задана площина – висхідною чи спадною.

Якщо площина в міру віддалення від спостерігача підіймається нагору, то таку площину називають *висхідною.*

Якщо площина в міру віддалення від спостерігача знижується, то таку площину називають *спадною.* Надалі будемо вважати, що на комплексному кресленні проекції висхідної площини орієнтовані однаково, а спадної – протилежно.

Тоді визначивши видимість прямої на одній із площин проекцій по конкуруючим точках, легко визначити видимість на іншій площині проекцій.

Якщо задана площина *висхідна*, то видимість прямої на обох площинах проекцій буде *однаковою,* якщо площина *спадна* – видимість буде *зворотною* (тобто те, що видимо на горизонтальній площині проекцій, буде невидимо на фронтальній площині проекцій і навпаки).

Задача 2. Побудувати лінію перетину двох площин, заданих трикутниками Р(ΔАВС) і Ω(ΔDEF). Визначити видимість (рис. 10).

Розв'язання. Дві площини перетинаються по прямій лінії. Вона визначається двома точками, що на комплексному кресленні знаходяться методом січних площин. Таким чином, для побудови шуканої лінії перетину досить знайти дві точки, кожна з котрих є точкою перетину сторони одного трикутника з площиною другого, тобто треба двічі вирішити задачу 1.

Проведемо, наприклад, через АС фронтально-проектуючу площину Σ.

Будуємо проекції лінії перетину 12 $(1_2 2_2,\ 1_1 2_1)$ допоміжної площини Σ з площиною трикутника DEF. Відзначимо точки 1 і 2 $(1_2,\ 2_2)$ перетину цієї площини із сторонами трикутника DE і DF $(D_2E_2$ і $D_2F_2)$.

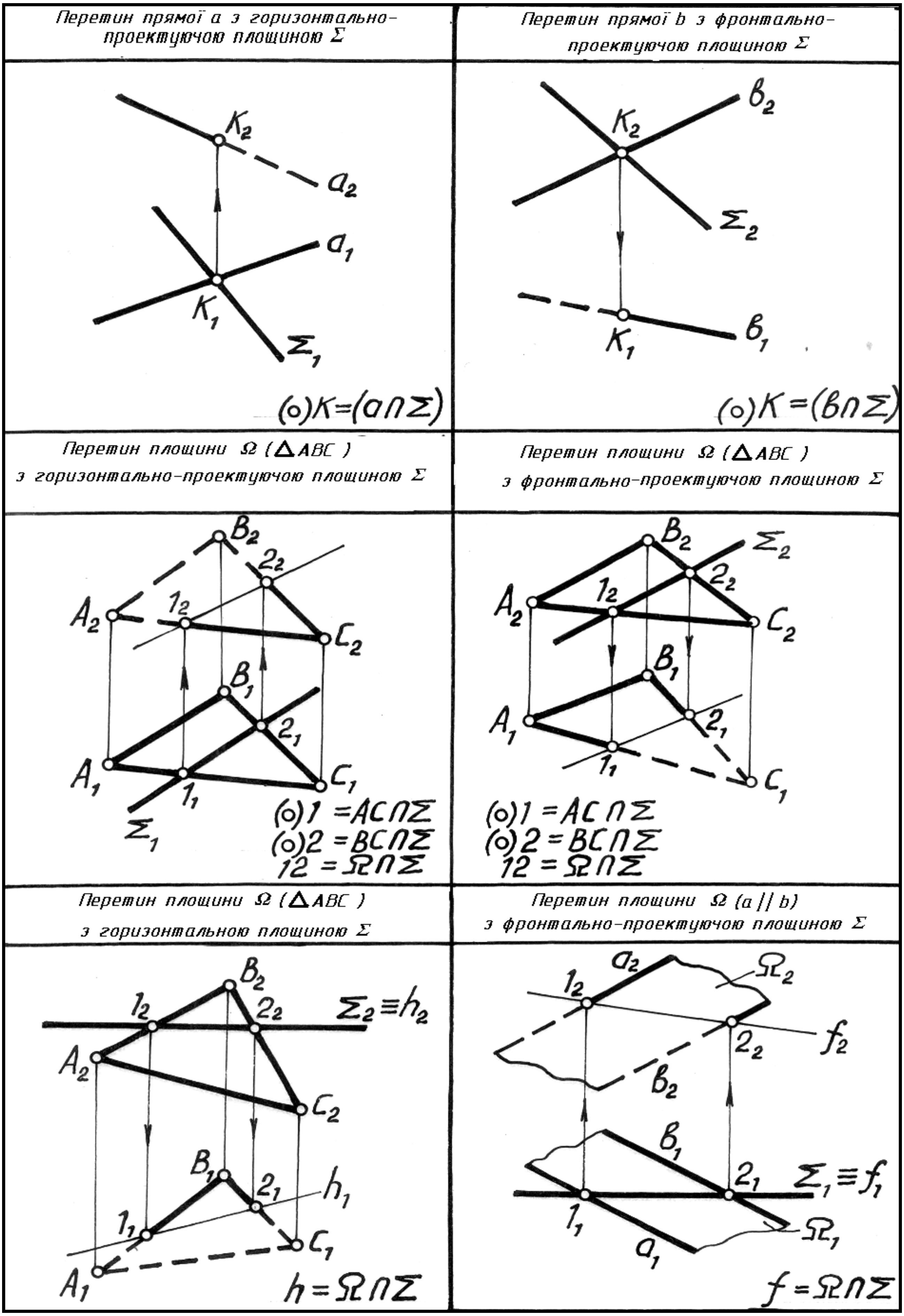

Перетин прямої a з горизонтально-проектуючою площиною Σ
K2
a2
a1
K1
Σ1
(o)K=(a∩Σ)
Перетин прямої b з фронтально-проектуючою площиною Σ
K2
b2
Σ2
K1
b1
(o)K=(b∩Σ)
Перетин площини Ω (△ABC) з горизонтально-проектуючою площиною Σ
B2
22
A2
12
C2
B1
21
A1
11
C1
Σ1
(o)1 =AC∩Σ
(o)2 =BC∩Σ
12 =Ω∩Σ
Перетин площини Ω (△ABC) з фронтально-проектуючою площиною Σ
B2
Σ2
A2
12
22
C2
B1
A1
21
11
C1
(o)1 =AC∩Σ
(o)2 =BC∩Σ
12 =Ω∩Σ
Перетин площини Ω (△ABC) з горизонтальною площиною Σ
B2
12
22
Σ2≡h2
A2
C2
B1
21
h1
11
C1
A1
h=Ω∩Σ
Перетин площини Ω (a || b) з фронтально-проектуючою площиною Σ
a2
Ω2
12
22
f2
b2
b1
21
Σ1≡f1
11
Ω1
a1
f=Ω∩Σ

Рис. 7

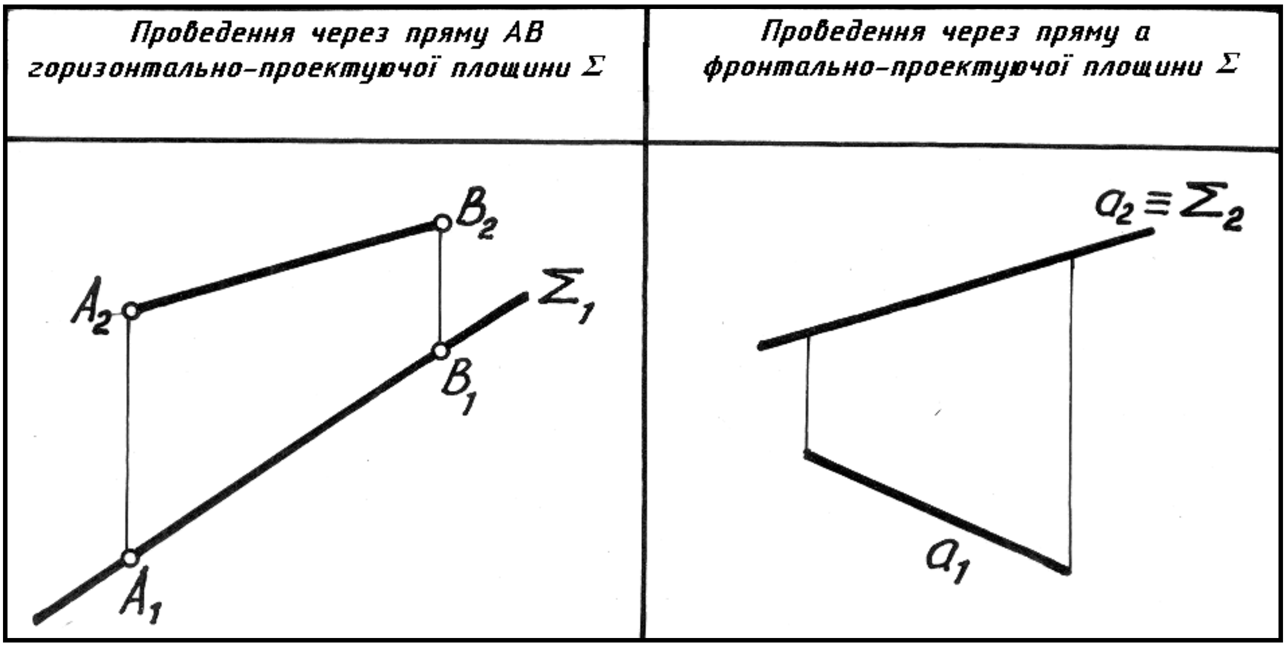

Проведення через пряму AB
горизонтально-проектуючої площини Σ
Проведення через пряму a
фронтально-проектуючої площини Σ
B_2
A_2
Σ_1
B_1
A_1
$a_2 \equiv \Sigma_2$
a_1

Рис. 8

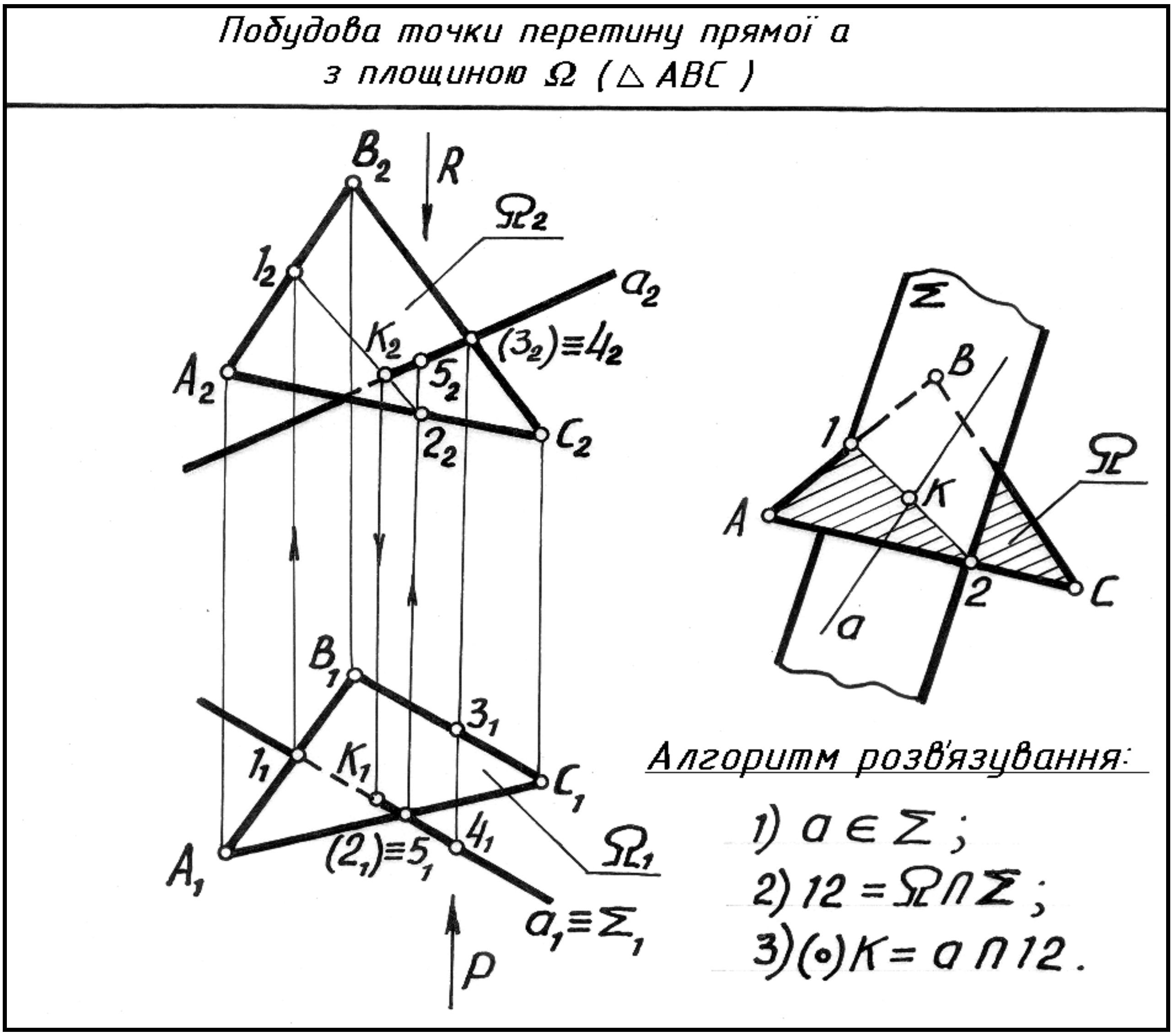
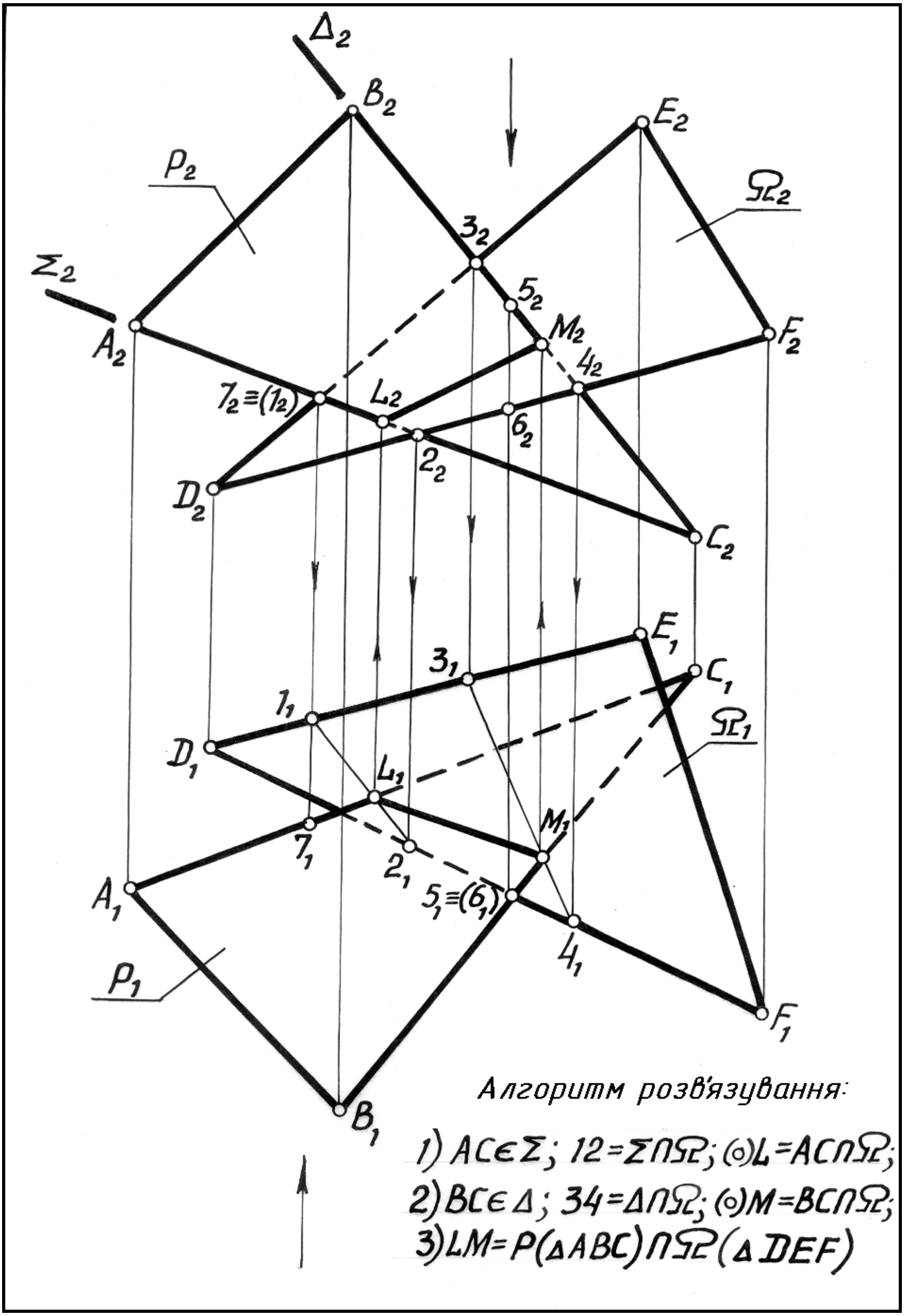

Побудова точки перетину прямої a
з площиною Ω (△ ABC)
B_2
R
Ω_2
1_2
a_2
K_2
$(3_2) \equiv 4_2$
A_2
5_2
2_2
C_2
B_1
3_1
1_1
K_1
C_1
A_1
$(2_1) \equiv 5_1$
4_1
Ω_1
$a_1 \equiv \Sigma_1$
P
Σ
B
1
Ω
A
K
2
C
a
Алгоритм розв'язування:
1) $a \in \Sigma$;
2) $12 = \Omega \cap \Sigma$;
3) (•) $K = a \cap 12$.

Рис. 9



Алгоритм розв'язування:

1) $AC \in \Sigma$; $12 = \Sigma \cap \Omega$; $(\cdot)L = AC \cap \Omega$;

2) $BC \in \Delta$; $34 = \Delta \cap \Omega$; $(\cdot)M = BC \cap \Omega$;

3) $LM = P(\Delta ABC) \cap \Omega(\Delta DEF)$

Рис. 10

У перетинанні горизонтальних проекцій A_1C_1 і 1_12_1 прямих AC і [1,2] знаходимо L_1,а потім L_2, тобто проекції шуканої точки, що належить лінії перетину.

У такий самий спосіб за допомогою допоміжної площини Δ знайдена точка M (M_1, M_2), яка є точкою перетину сторони BC трикутника ABC з площиною трикутника DEF. З'єднавши однойменні проекції знайдених точок L і M, одержуємо проекції шуканої лінії перетину.

Визначення видимості трикутників не відрізняється від розглянутого приклада в задачі 1 на рис. 9.

Задача 3. Побудувати лінію перетину двох площин Σ (a ‖ в) і Δ (c ∩ d) (рис. 11).

Розв'язання. Лінію перетину площин, проекції яких не накладаються на кресленику, можна побудувати, застосовуючи допоміжні січні площини. Здебільшого допоміжні площини вибирають проектуючими. Кожна допоміжна площина дає одну точку шуканої лінії перетину.

Для побудови лінії перетину заданих площин проведені дві допоміжні горизонтальні площини Г і Т. Площина Г перетинає площину Σ по горизонталі [1,2], точки $1(1_1,1_2)$ і $2(2_1,2_2)$ якої визначаються як точки перетину прямих **a** і **b** з площиною Г. Фронтальні проекції 1_2 і 2_2 цих точок являють собою точки перетину проекцій $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{b}_2$ прямих **a** і **b** зі слідом $Г_2$ площини Г. Горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 знайдені як точки перетину ліній проекційного зв'язку, проведених з 1_2 і 2_2, з горизонтальними проекціями $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{b}_1$ прямих **a** і **b.**

З другою заданою площиною Δ площина Г перетинається по горизонталі [3,4], точки 3 (3_1, 3_2) і 4 (4_1, 4_2) якої визначаються аналогічним засобом. Обидві горизонталі належать до площини Г і тому мають спільну точку M (M_1, M_2), що є однією з точок шуканої лінії перетину.

Горизонтальна проекція M_1 точки M являє собою точку перетину горизонтальних проекцій 1_12_1 і 3_14_1 горизонталей [1,2] і [3,4]. Фронтальна її проекція M_2 належить сліду $Г_2$ площини Г і визначається як точка перетину лінії проекційного зв'язку, проведеної з M_1, зі слідом площини $Г_2$.

Друга точка N (N_1, N_2) лінії перетину знайдена за допомогою допоміжної горизонтальної площини Т аналогічним засобом.

Варто мати на увазі, якщо допоміжні площини Г і Т паралельні між собою, то і горизонталі, по яких вони перетинають кожну із заданих площин, теж паралельні прямі. Скориставшись цим, для побудови другої пари горизонталей досить мати по одній точці 5 (5_1, 5_2) і 6 (6_1, 6_2).

Пряма, проведена через точки M і N, являє собою шукану лінію перетину заданих площин.

2.1.3. Розв'язання деяких задач. Перпендикулярність прямої і площини. Взаємна перпендикулярність площин

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то її проекції перпендикулярні до однойменних проекцій однойменних ліній рівня цієї площини.

Дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них проходить через пряму лінію, перпендикулярну до іншої площини.

Задача 4. Визначити найкоротшу відстань від точки A до площини Σ(ABC) (рис. 12).

Розв'язання. Алгоритм розв'язання в даному випадку складається з трьох основних етапів:

1) $\ell \perp \Sigma$, побудова перпендикуляра з точки A на площину Σ. Пряма і площина взаємно перпендикулярні, якщо горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі, а фронтальна – до фронтальної проекції фронталі площини.

Через точку A (A_1,A_2)проводимо $\ell_1 \perp h_1$ і $\ell_2 \perp f_2$;

2) $K = \ell \cap \Sigma$; визначення точки перетину перпендикуляра з площиною. Визначення точки перетину прямої з площиною розглянуто в задачі 1 (рис. 9).

3) A_0K_1 – натуральна величина AK. Натуральну величину шуканої відстані визначаємо способом прямокутного трикутника, для чого приймаємо A_1K_1 за один з катетів прямокутного трикутника, другий катет дорівнює ($Z_A - Z_K$), тоді гіпотенуза A_0K_1 є натуральною величиною відстані від точки A до площини Σ.

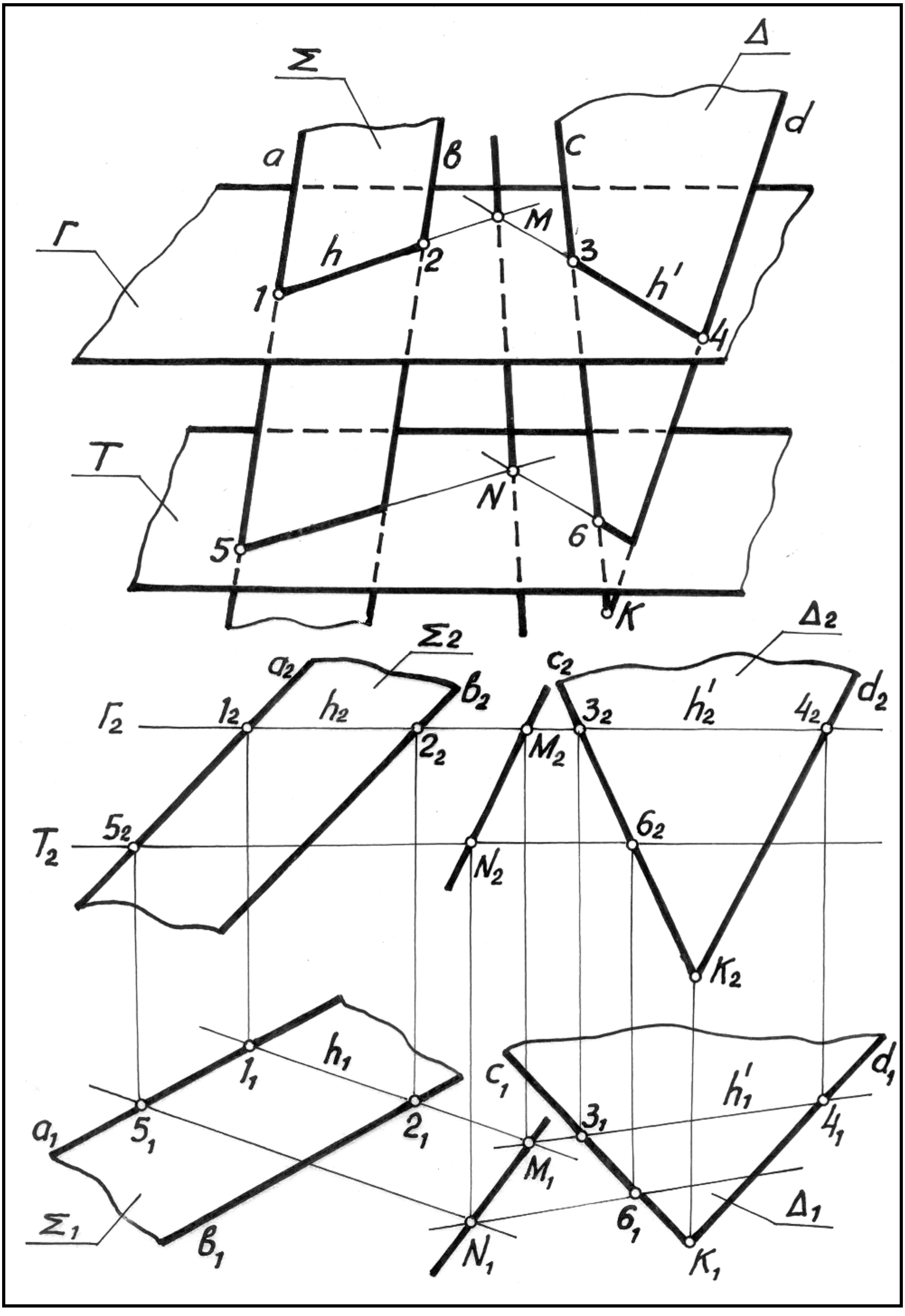
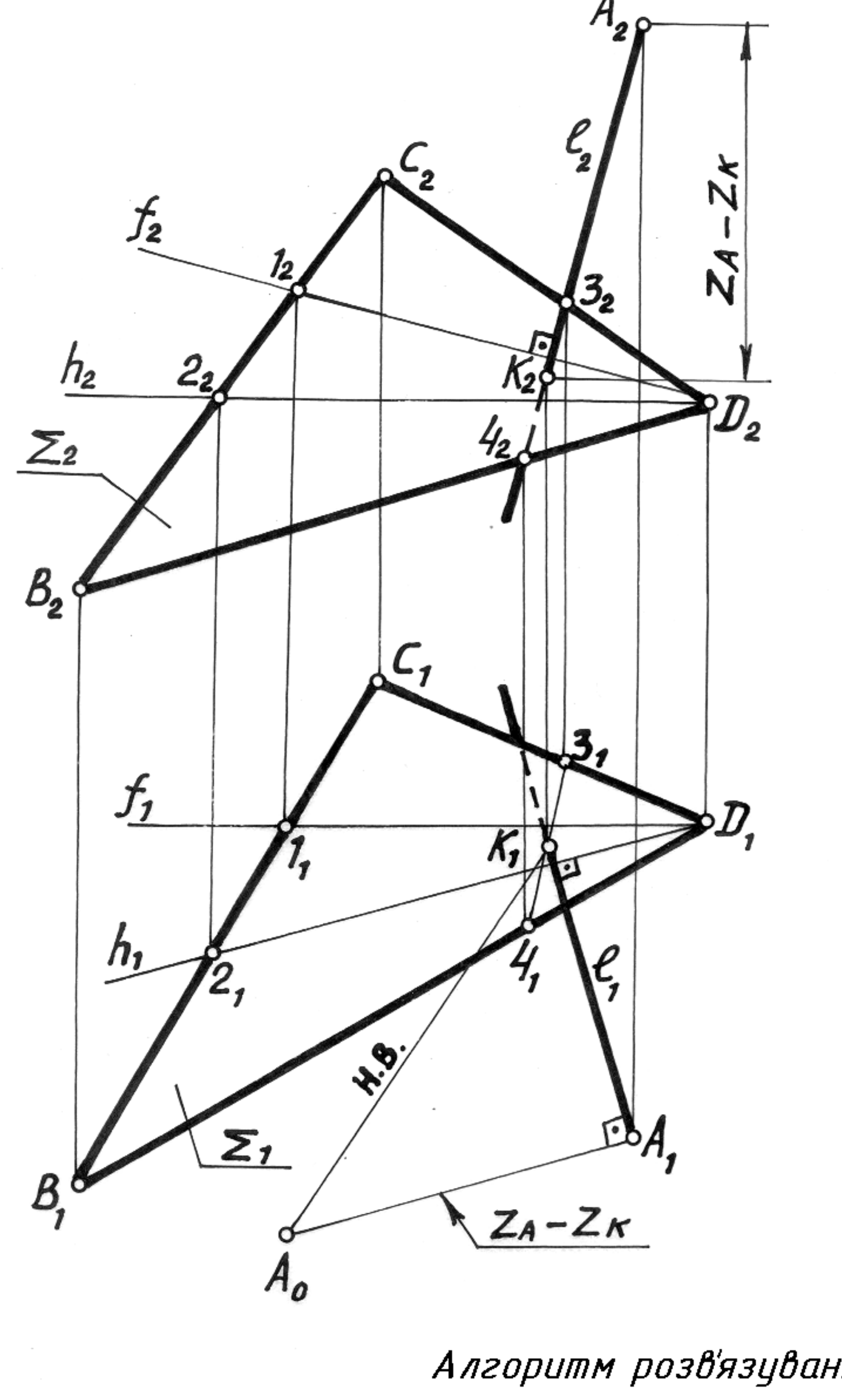

Σ
Δ
a
в
c
d
Г
M
h
1
2
3
4
h'
T
N
5
6
K
Σ_2
Δ_2
a_2
$в_2$
c_2
d_2
$Г_2$
1_2
h_2
2_2
M_2
3_2
h'_2
4_2
T_2
5_2
N_2
6_2
K_2
h_1
1_1
c_1
d_1
h'_1
a_1
5_1
2_1
3_1
M_1
4_1
6_1
Δ_1
Σ_1
$в_1$
N_1
K_1

Рис. 11



Алгоритм розв'язування:

1) $\ell \perp \Sigma(\Delta ABC)$; $\ell_1 \perp h_1$; $\ell_2 \perp f_2$

2) $(\circ)K = \ell \cap \Sigma$;

3) $A_0K_1 =$ н.в. AK

Рис. 12

Задача 5. Провести через пряму АВ площину Σ, перпендикулярну до площини Т(ΔKLM) (рис. 13).

Розв’язання. Якщо площина містить у собі перпендикуляр до іншої площини, то ці площини взаємно перпендикулярні.

Щоб привести через пряму АВ шукану площину, треба з будь-якої точки прямої, наприклад точки В, провести перпендикуляр до даної площини.

Тому що в трикутнику KLM сторона КМ є горизонталь, а KL – фронталь, то проводимо $\ell_2 \perp K_2L_2$, а $\ell_1 \perp K_1M_1$.

Прямі АВ і ℓ визначають шукану площину $\Sigma(AB \cap \ell) \perp T(\Delta KLM)$

2.2. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Література	**[1]**	**[8]**	**[9]**	**[12]**	**[7]**
Глава, §§	**IV,§§26-28**	**6,§§6.1-6.4**	**1.6. §§28-36**	**5, §§5.1-5.3**	**III тема**

Додаткові вказівки: Задачі, в умовах яких вказується спосіб перетворення комплексного кресленика, повинні вирішуватися цим способом.

2.2.1. Запитання для самоперевірки

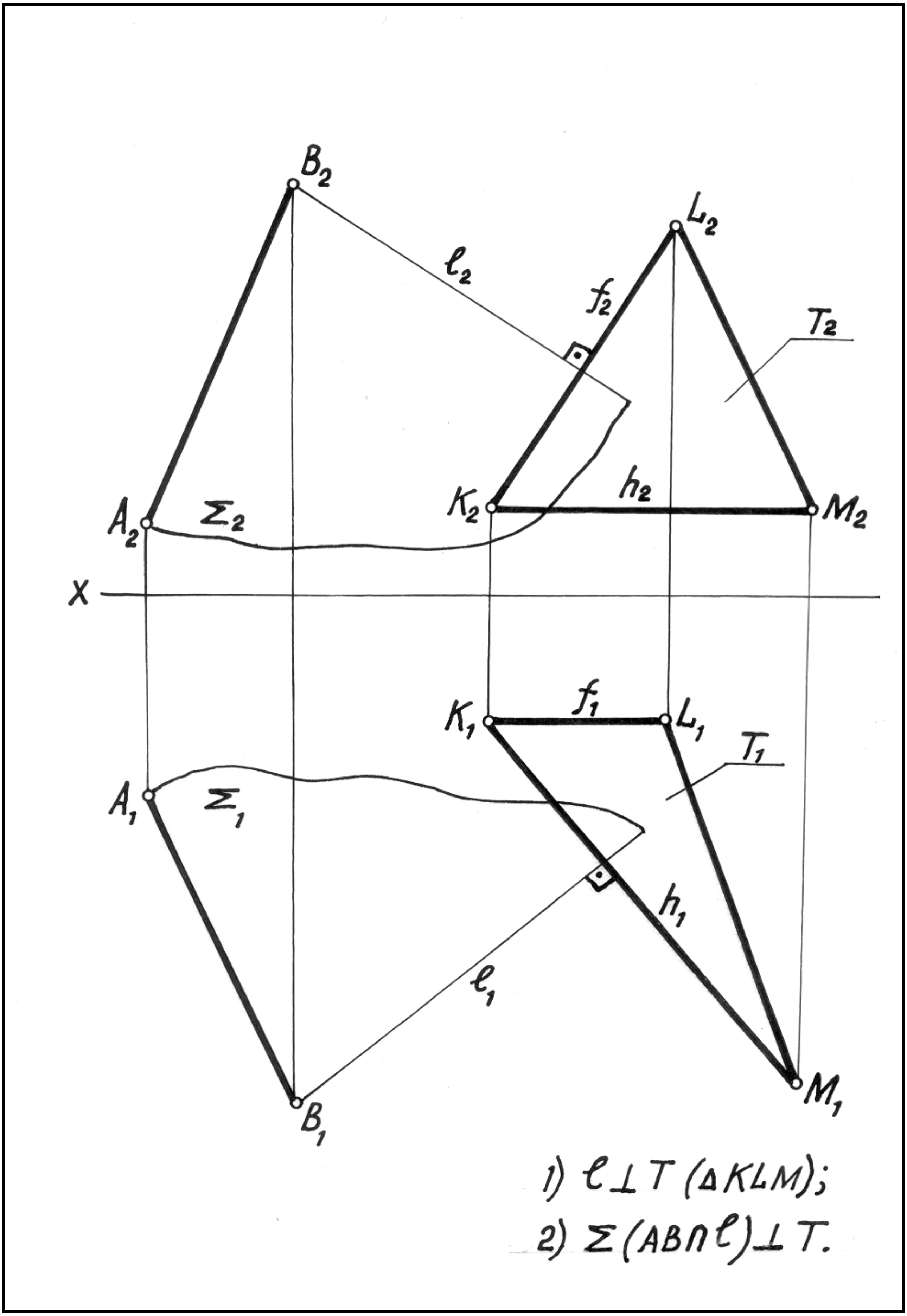
1. Які існують основні способи перетворення комплексного кресленика?
2. У чому є принципова різниця в способах заміни площин проекцій і обертання?
3. Які основні задачі розв’язуються заміною однієї площини проекцій? Двох?
4. Які параметри комплексного кресленика залишаються незмінними при заміні фронтальної площини проекцій? Горизонтальної площини проекцій?
5. Заміну якої площини проекцій потрібно зробити, щоб визначити кут нахилу прямої загального положення до площини проекцій Π_1? До площини Π_2?
6. Яку пряму рівня, що належить площині загального положення, необхідно перетворити в проектуючу, щоб визначити кут нахилу цієї площини до площини проекцій Π_1? До площини проекцій Π_2?
7. Як переміщуються фронтальна і горизонтальна проекції точки при обертанні її навколо осі, перпендикулярної до площини Π_1? Перпендикулярної до площини Π_2? Перпендикулярної до площини Π_3?
8. У чому полягає сутність способу обертання навколо горизонталі чи фронталі площини?
9. По якій кривій і в якій площині відбувається переміщення точок площини при обертанні площини навколо її лінії рівня (горизонталі чи фронталі)?
10. У чому сутність способу плоскопаралельного переміщення?

Розглянемо ряд задач, при розв'язуванні яких використовувались способи перетворення комплексного кресленика. Це метричні задачі, розв'язування яких пов'язане з визначенням на комплексному кресленику дійсних величин відстаней, кутів і плоских фігур.

2.2.2. Визначення відстаней

Задача 1. Визначити натуральну величину відрізка прямої (відстань між двома точками) (рис. 14).

Розв’язання. Для визначення натуральної величини відрізка прямої необхідно перетворити кресленик таким чином, щоб даний відрізок був паралельний до будь-якої з площин проекцій, тобто став прямою рівня.



B2
l2
L2
f2
T2
A2
Σ2
K2
h2
M2
X
K1
f1
L1
T1
A1
Σ1
h1
l1
M1
B1
1) l ⊥ T (ΔKLM);
2) Σ (AB ∩ l) ⊥ T.

Рис. 13

Способом заміни площин проекцій (рис. l4 а).

Додається нова площина проекцій Π_4, перпендикулярна до площини Π_1 і паралельна АВ. Нова вісь проекцій $X_{14} \parallel A_1B_1$. З горизонтальних проекцій кінців відрізка прямої A_1B_1 проведені лінії проекційного зв'язку, перпендикулярні X_{14}. Відстані від проекцій кінців відрізка прямої A_4B_4 до осі X_{14} дорівнюють відстаням від проекцій кінців відрізка A_2B_2 до осі X_{12} (тобто залишаються незмінними висоти точок).

У такий спосіб A_4B_4 – натуральна величина відрізка АВ, а кут α – це кут нахилу відрізка АВ до площини проекцій Π_4.

Способом обертання навколо проекційної прямої (рис. 14 б).

Проводимо вісь обертання $\boldsymbol{i} \perp \Pi_1$ крізь один з кінців відрізка АВ, наприклад, точку В, що при обертанні буде залишатися на місці (тому що точка, належна осі обертання, залишається нерухомою).

Точка А рухається по колу, площина Г якого перпендикулярна до осі $\boldsymbol{i}$.

Через те, що площина обертання точки А горизонтальна, горизонтальна проекція A_1 точки А, повторюючи просторовий рух точки А, переміщується також по колу, а фронтальна – по прямій, паралельній до осі X_{12} чи перпендикулярній до осі обертання $\boldsymbol{i}$.

Повертаємо горизонтальну проекцію A_1B_1, що не змінює своїх відносних розмірів, до положення $A'_1B'_1$ паралельно до осі X_{12}. Добудовуємо нову проекцію A'_2, з'єднуємо її з B'_2 ($B_2 \equiv B'_2$).

$A'B'_2$ – натуральна величина відрізка АВ, а кут α – кут нахилу відрізка АВ до площини проекцій Π_1.

Способом плоскопаралельного переміщення (рис. 14 в).

Переміщуємо горизонтальну проекцію A_1B_1 прямої АВ, зберігаючи її відносні розміри, у будь-яке місце креслення паралельно до осі X_{12}.

Через те, що в даному прикладі переміщення точок у просторі відбувається в площинах, паралельних до Π_1, фронтальні проекції точок переміщуються по прямих, паралельних до осі X_{12}.

Побудова проекцій A'_2 і B'_2 видна з креслення. $A'_2B'_2$ – натуральна величина відрізка АВ, кут α – кут нахилу відрізка АВ до площини проекцій Π_1.

Способом обертання навколо лінії рівня (рис. 14 г).

Крізь точку А прямої АВ проводимо горизонталь h (h_1, h_2).

Дана пряма і горизонталь визначають площину в просторі, яку ми повертаємо навколо горизонталі до положення площини рівня, паралельної до площини Π_1.

Точка А належить осі обертання h, тому залишається при обертанні на місці. Точка В обертається в площині Σ, перпендикулярній до осі обертання h ($\Sigma_1 \perp h_1$).

Маючи проекції радіуса обертання точки В, визначаємо його натуральну величину способом прямокутного трикутника, гіпотенуза якого – $R_{об}$.

Від точки O_1 відкладаємо на сліді площини Σ_1 відрізок, який дорівнює натуральній величині радіуса обертання. Отриману точку B'_1 з'єднуємо з A'_1

$A'_1B'_1$ – шукана величина, тобто натуральна величина відрізка АВ.

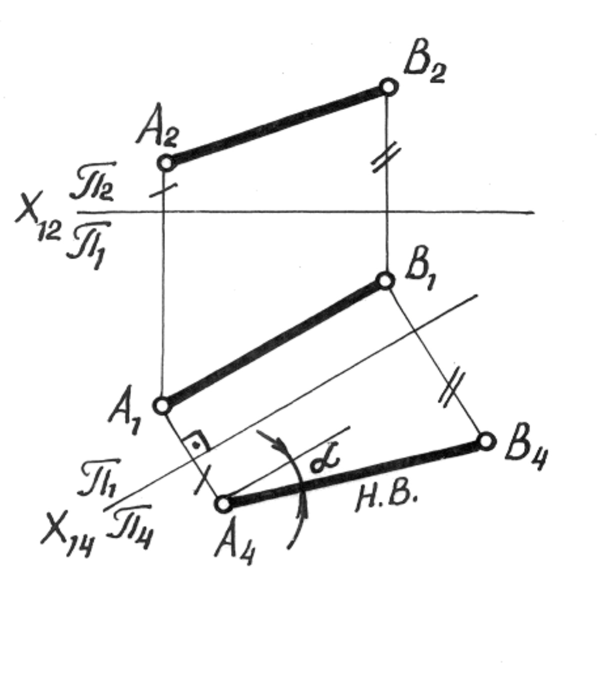
Кут α – кут нахилу відрізка АВ до площини проекцій Π_1.

Варто зауважити, що всі розглянуті способи перетворення комплексного креслення дають при рішенні конкретної задачі тотожні результати.

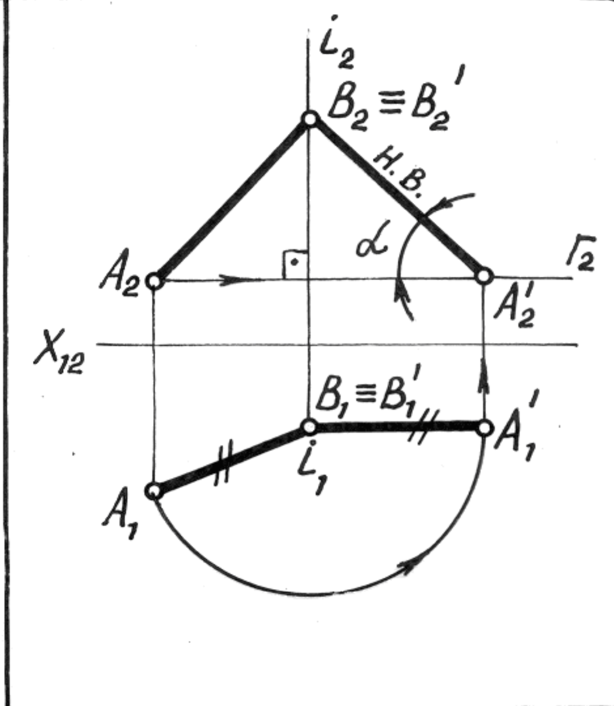
Задача 2. Визначити відстань від точки до прямої (рис. 15). Відстань від точки до прямої вимірюється відрізком перпендикуляра, проведеного з точки на пряму. Якщо пряму загального положення перетворити в проектуючу по відношенню до будь-якої площини, то відстань від точки, у яку вироджується пряма, до проекції заданої точки на цю площину є шуканою.

Визначення натуральної величини відрізка прямої

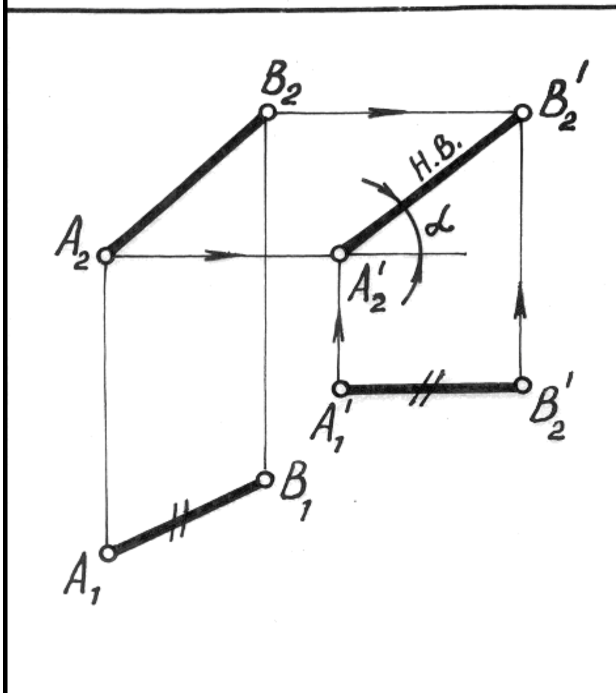
а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо проектуючої прямої



в) способом плоскопаралельного переміщення



г) способом обертання навколо лінії рівня

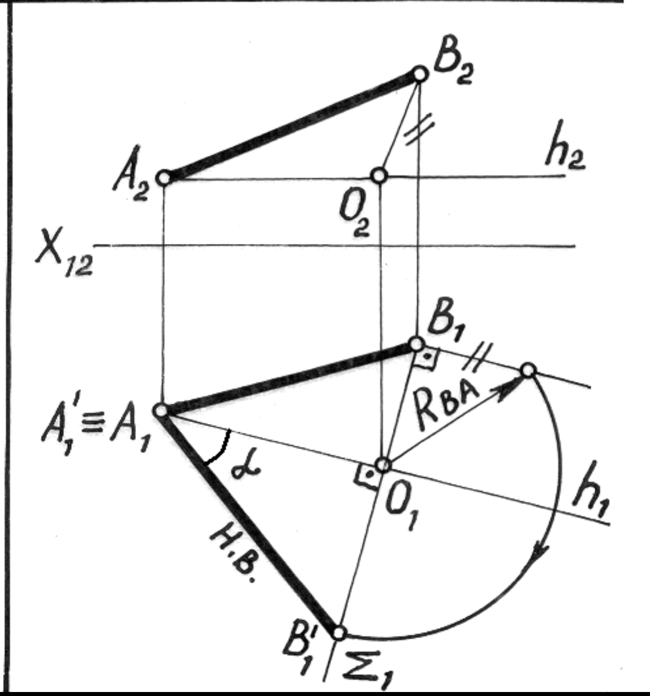


Рис. 14

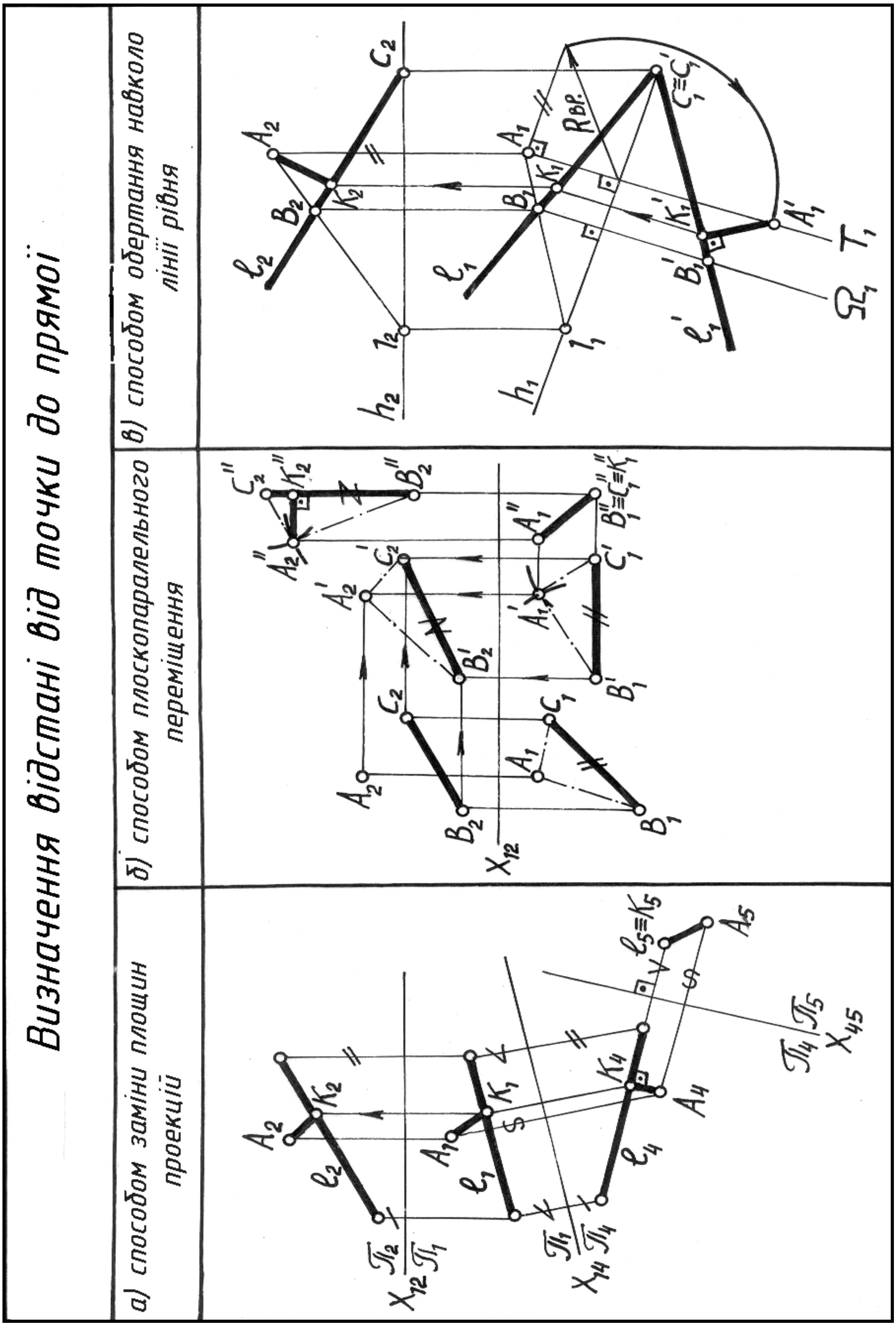

Визначення відстані від точки до прямої
а) способом заміни площин проекцій
б) способом плоскопаралельного переміщення
в) способом обертання навколо лінії рівня

Рис. 15

Розв'язання.

Способом заміни площин проекцій (рис. 15 а).

Задача розв'язується шляхом дворазової заміни площин проекцій:

1) площину $П_4$ задаємо паралельною до ℓ ($X_{14} \parallel ℓ_1$). В системі площин $П_1П_4$ пряма ℓ стає прямою рівня;

2) площину $П_5$ задаємо перпендикулярно до ℓ ($X_{45} \perp ℓ_4$). В системі площин $П_4П_5$ пряма ℓ стає проекційною. У кожній новій системі площин проекцій відповідно будуємо і точку А. A_5K_5 – шукана відстань. Проекції точки К (K_4, K_1 і K_2) визначаємо зворотною заміною площин проекцій.

Способом плоскопаралельного переміщення (рис. 15 б).

Двічі переміщуємо пряму ВС разом із точкою А до положення, коли пряма стає проектуючою.

Спочатку пряму ВС і точку А, зберігаючи незмінним їхнє відносне положення, переміщуємо до положення, коли пряма ВС стане паралельною до $П_2$ ($B_1C_1 \parallel X_{12}$). З точок A_2, B_2 і C_2 проводимо прямі, паралельні до осі X_{12}, і будуємо на них точки A'_2, B'_2 і C'_2 за допомогою ліній проекційного зв'язку, проведених з горизонтальних проекцій точок A'_1, B'_1 і C'_1.

Потім, зберігаючи незмінним відносне положення B'_2, C'_2 і A'_2, переміщуємо їх таким чином, щоб пряма ВС стала проектуючою до площини $П_1$ ($B''_2C''_2 \perp X_{12}$). $A''_1 K''_1$ – шукана відстань.

Способом обертання навколо лінії рівня (рис. 15 в).

Пряма ВС і точка А визначають площину в просторі. Проводимо в цій площині будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) і повертаємо навколо неї площину до положення площини рівня, паралельної до $П_1$. Точка С розташована на осі обертання і залишається при обертанні на місці, тобто ($C_1 \equiv C'_1$). Точки А і В обертаються в горизонтально-проектуючих площинах Т і Ω, перпендикулярних до осі обертання. Для побудови нових проекцій точок А і В досить визначити натуральну величину радіуса обертання кожної з них способом прямокутного трикутника (у даному прикладі побудова виконана тільки для точки А).

$B'_1C'_1$ – натуральна величина відрізка ВС;

$A'_1K'_1$ – натуральна величина шуканої відстані.

Зворотним обертанням переносимо шукану відстань на проекції (A_1K_1 і A_2K_2).

Задача 3. Визначити відстань між паралельними прямими (рис. 16).

Розв'язання.

Способом заміни площин проекцій (рис. 16 а).

Якщо взяти будь-яку точку на одній з паралельних прямих (у даному прикладі $K \subset a$), то рішенням задачі стає визначення відстані від точки до прямої (дивись задачу 2 цього розділу, рис. 15).

Способом обертання навколо лінії рівня (рис. 16 б).

У площині Σ (а ∥ в) проводимо будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) (чи фронталь) і повертаємо прямі до положення горизонталей (або фронталей).

Для отримання відповіді досить повернути одну з прямих, наприклад b, до положення b'_1. Більш докладно про обертання точки К навколо горизонталі дивись задачу I_2 цього розділу (рис. 14).

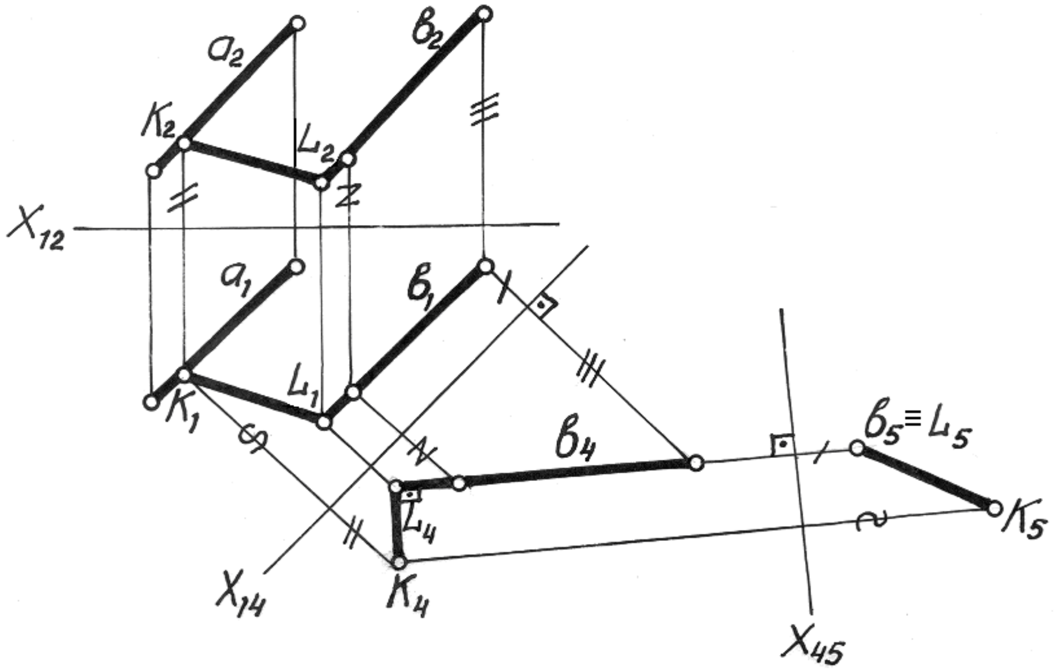
Через точку $1_1 \equiv 1'_1$, яка при обертанні залишається на місці, проводимо a'_1 паралельно b'_1. Перпендикуляр між a'_1 і b'_1 у будь-якому місці є шукана відстань.

Задача 4. Визначення відстані між мимобіжними прямими (рис. 17).

Розв'язання. Відстань між мимобіжними прямими вимірюється відрізком KL перпендикуляра до обох прямих. Якщо одну з прямих розташувати перпендикулярно до якої-небудь площини проекцій (наприклад, $П_1$), то відрізок KL виявляється паралельним до цієї площини, і його проекція на цю площину – шукана відстань.

Визначення відстані між паралельними прямими

а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо лінії рівня

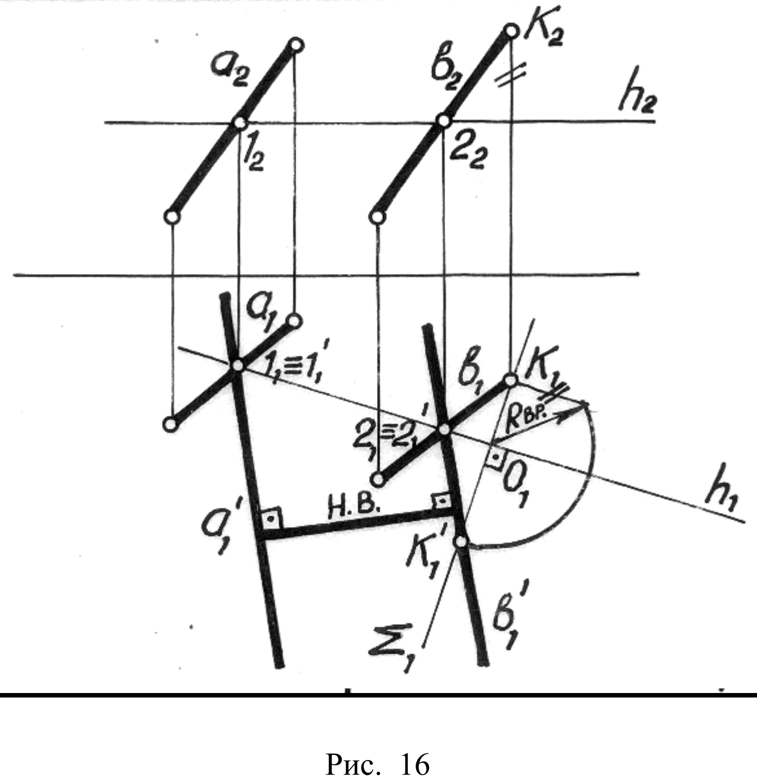


Рис. 16

Визначення відстані між мимобіжними прямими

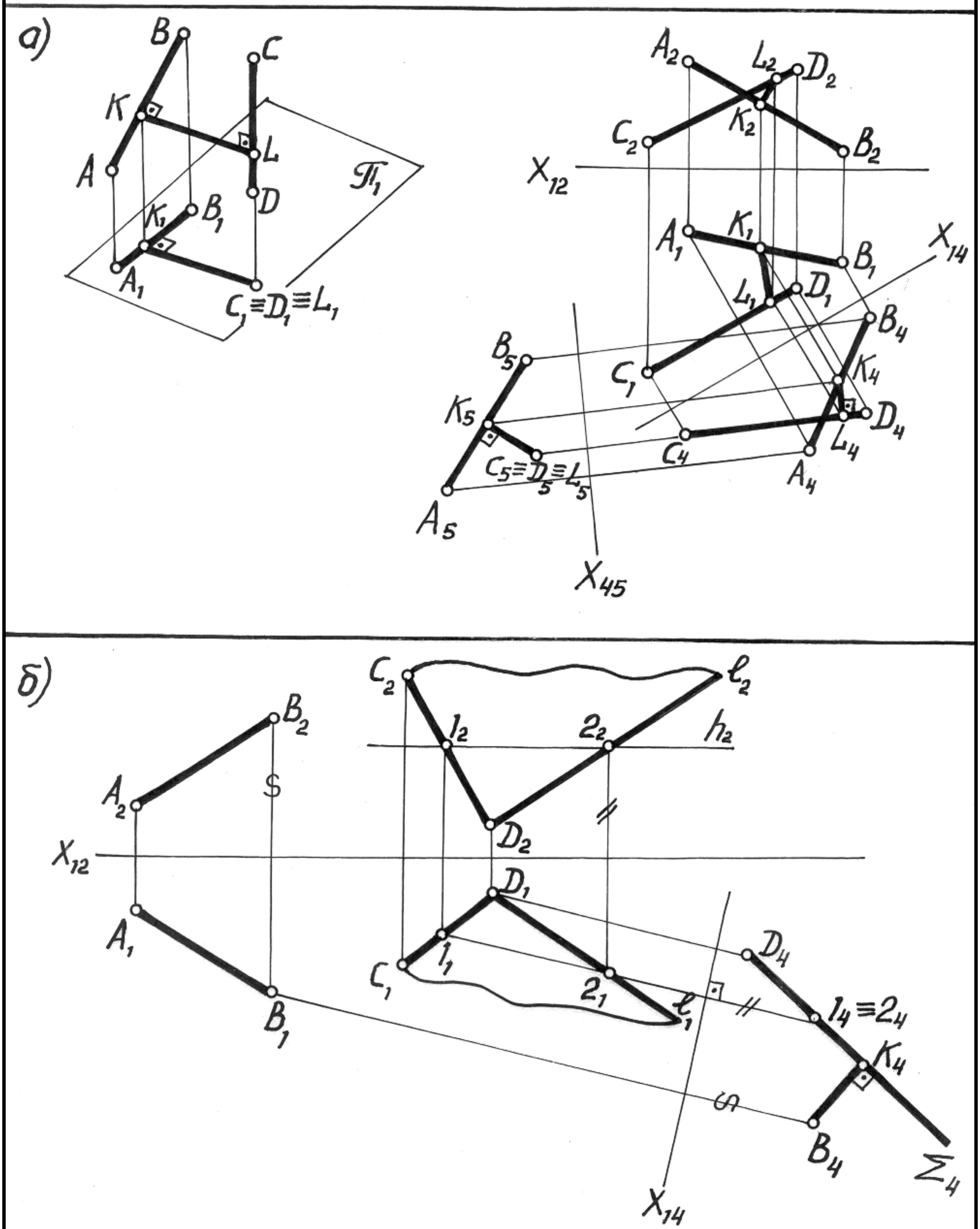


Рис. 17

Проекція прямого кута між KL і AB на площину $П_1$ виявляється також прямим кутом між A_1B_1 і K_1L_1, тому що одна із сторін AK прямого кута AKL паралельна до площини проекцій $П_1$.

Способом заміни площин проекцій.

Розглянемо два варіанти розв'язання.

а) Одну з мимобіжних прямих (у даному випадку CD) дворазовою заміною площин проекцій перетворюємо у проектуючу пряму ($X_{14} \parallel C_1D_1$; $X_{45} \perp C_4D_4$) (рис. 17 а).

Проекції прямої AB відповідно добудовуємо в системі площин проекцій X_{14} і X_{45}. Проводимо перпендикуляр з D_5C_5 на пряму A_5B_5. K_5L_5 – шукана відстань.

Проекції точок K_4, L_4, K_1, L_1, K_2, L_2 визначаємо зворотною заміною площин проекцій.

б) Скористаємося наступним міркуванням. Проведемо через пряму CD допоміжну площину $\Sigma(CD \cap \ell)$, паралельну до прямої AB ($\ell_2 \parallel A_2B_2$); ($\ell_1 \parallel A_1B_1$). Тоді відстань між будь-якою точкою, взятою на прямій AB (у даному прикладі точка B), до площини Σ є шуканою величиною (рис. 17 б).

Замінюємо площину проекцій $П_2$ на нову площину проекцій $П_4$, перпендикулярну до будь-якої горизонталі h (h_1, h_2) допоміжної площини Σ ($X_{14} \perp h_1$).

Отримаємо вироджену проекцію площини Σ_4. Візьмемо довільну точку на прямій AB (у даному прикладі точку B) і побудуємо її в системі площин проекцій $П_1П_4$. Перпендикуляр B_4K_4 на Σ_4 буде шуканою відстанню.

Задача 5. Визначити відстань від точки до площини (рис. 18).

Відстань від точки до площини вимірюється величиною перпендикуляра, проведеного з цієї точки на площину. Ця відстань проектується на будь-яку площину проекцій у дійсну величину, якщо дана площина перпендикулярна до цієї площини проекцій.

Домогтися такого положення можна різними способами перетворення комплексного кресленика.

Розв'язання.

Способом заміни площин проекцій (рис.18 а).

Додамо площину $П_4$, перпендикулярну до площини $\Sigma(\Delta BCD)$. Для цього проводимо в площині Σ будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) і розташовуємо вісь проекцій $X_{14} \perp h_1$. Будуємо проекції точки A_4 і площини Σ_4 у системі площин проекцій $П_1П_4$.

Відстань A_4K_4 – шукана, котру зворотнім проектуванням повертаємо на вихідні проекції.

Способом обертання навколо проектуючей прямой (рис. 18 б).

Задану площину $\Sigma(\Delta BCD)$ перетворимо у фронтально-проектуючу, тобто поставимо її в положення, перпендикулярне до $П_2$. Для цього проводимо будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) в площині Σ і обертаємо її горизонтальну проекцію h_1 до положення, перпендикулярного $П_2$, ($h_1 \perp X_{12}$) на кут φ навколо осі, що проходить через вершину D перпендикулярно до площини $П_1$ (вісь на кресленику не вказана). Повертаємо на той же кут і дві інші вершини трикутника. Побудова нової фронтальної проекції площини, що вироджується в пряму лінію, зрозуміла з кресленика. На той же кут φ і в тому ж напрямку повертаємо точку A. $A'_2K'_2$ – шукана відстань.

Способом плоскопаралельного переміщення (рис. 18 в).

Переміщуємо горизонтальні проекції трикутника BCD ($B_1C_1D_1$) і точки A (A_1), зберігаючи їх відносне положення так, щоб площина трикутника стала фронтально-проектуючою.

Для цього будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) площини трикутника ставимо в положення, перпендикулярне до площини проекцій $П_2$ ($h'_1 \perp X_{12}$).

Побудова нових фронтальних проекцій площини і точки зрозуміла з кресленика. $A'_2K'_2$ – шукана відстань.

Задача 6. Визначити відстань між прямою і площиною, паралельними між собою.

Для цієї задачі варто взяти на прямій будь-яку точку і розв'язання задачі зведеться до визначення відстані від точки до площини (див. задачу 5 цього розділу, рис. 18).

Задача 7. Визначити відстань між паралельними площинами (рис. 19).

Відстань між паралельними площинами можна визначити, побудувавши перпендикуляр з будь-якої точки однієї площини на іншу площину, тому ця задача зводиться до визначення відстані від точки до площини, (див. задачу 5 цього розділу, рис. 18).

Розв'яжемо задачу.

Способом заміни площин проекцій.

Додамо площину Π_4, перпендикулярну до обох площин Σ і Δ. Вісь проекцій X_{14} перпендикулярна до горизонтальної проекції будь-якої горизонталі h (h_1, h_2), проведеної в одній з площин (у даному прикладі в площині $\Sigma(\Delta ABC)$. Будуємо проекцію цієї площини і точки К, що належить до площини $\Delta(m \cap n)$, у новій системі площин проекції $\Pi_1\Pi_4$.

Через К проводимо $\Delta_4 \parallel \Sigma_4$ тому, що площини паралельні відповідно до умови задачі.

Відстань між Σ_4 і Δ_4 визначається по перпендикуляру між ними.

У даному прикладі K_4L_4 – шукана відстань.

Задача може бути розв'язана й іншим способом (дивися задачу 5 даного розділу, рис. 18).

2.2.3. Визначення кутів

Задача 8. Визначити кут між прямою загального положення і площиною проекцій (рис. 20).

Якщо пряма паралельна до площини проекцій Π_2, то утворений цією прямою із площиною Π_1 кут α зображується без спотворення на площині Π_2.

Якщо пряма паралельна до площини Π_1 то утворений цією прямою із площиною Π_2 кут β зображується без спотворення на площині Π_1.

Тому, перетворивши дану пряму загального положення на лінію рівня, можна визначити відповідно кути α чи β. Рішенням цієї задачі стає перетворення прямої загального положення в пряму рівня.

Більш докладне розв'язання: дивись задачу 1 даного розділу (рис. 14), крім пункту 2.

Задача 9. Визначити кут нахилу площини загального положення до площин проекцій (рис. 21).

Кут нахилу α площини $\Sigma(\Delta ABC)$ до площини проекцій Π_1 проектується без спотворення на площину Π_2, якщо площина перпендикулярна до Π_2, а кут нахилу β площини Σ до площини Π_2 проектується без спотворення на площину проекцій Π_1, якщо площина перпендикулярна до Π_1.

Розв'язання даної задачі зводиться до перетворення площини загального положення в проектуючу:

а) способом заміни площин проекцій (рис. 21 а).

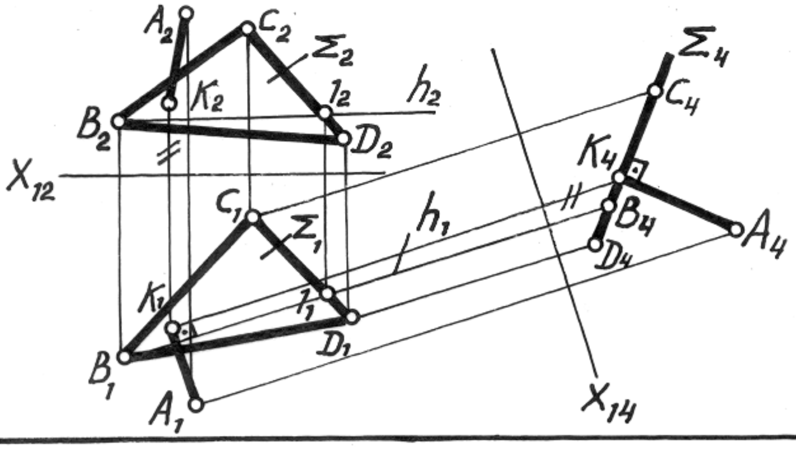
Додаємо площину Π_4, перпендикулярну до площини $\Sigma(\Delta ABC)$. Для цього проводимо в площині Σ будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) і розташовуємо вісь проекцій $X_{14} \perp h_1$. У новій системі площин проекцій задана площина Σ_4 стає проектуючою, а кут α – шуканий (для визначення Σ_4 досить побудувати проекції будь-яких двох точок, що належать до неї);

б) способом обертання навколо проектуючої прямої (рис. 21 б).

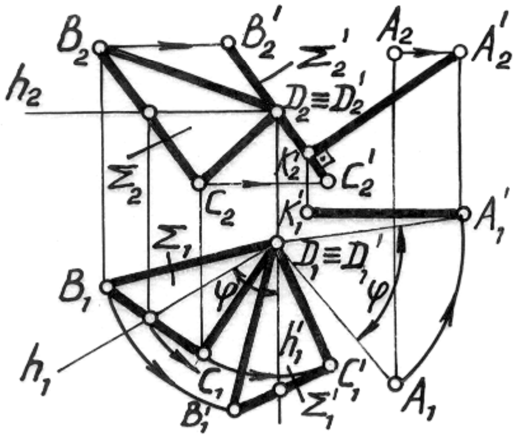
Задану площину $\Sigma(\Delta ABC)$ перетворимо у фронтально-проектуючу, тобто поставимо її в положення, перпендикулярне до Π_2.

Визначення відстані від точки до площини

а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо проектуючої прямої



в) способом плоскопаралельного переміщення

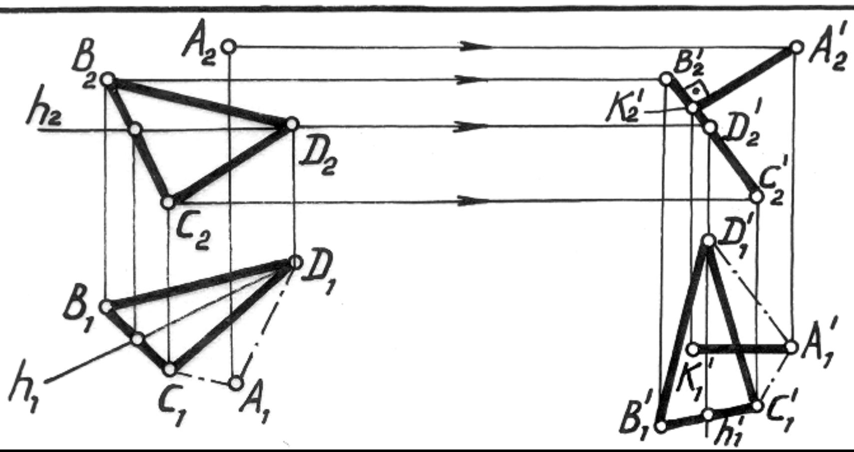


Рис. 18

Визначення відстані між паралельними площинами Σ (ΔABC) та Δ ($m \cap n$)

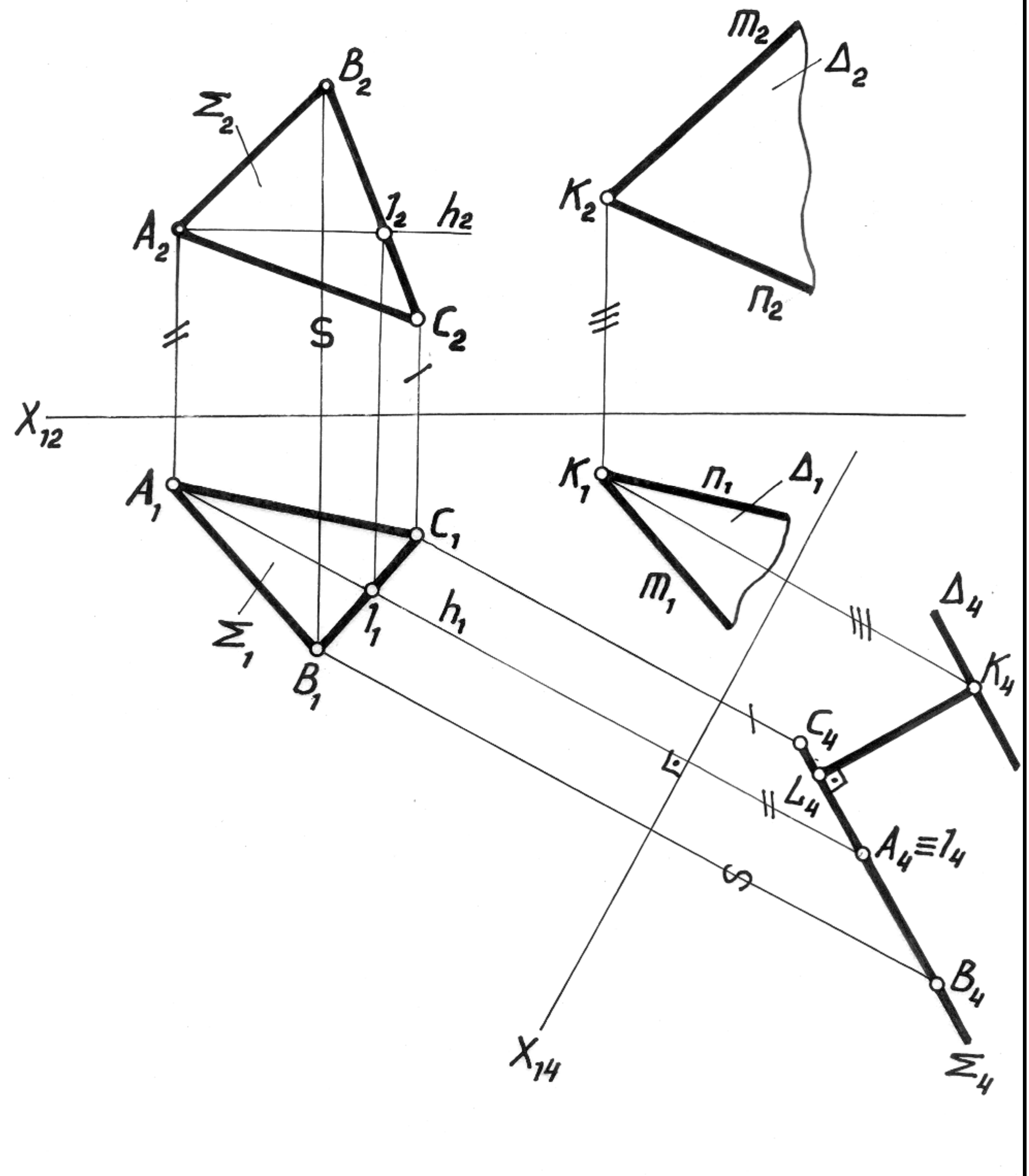
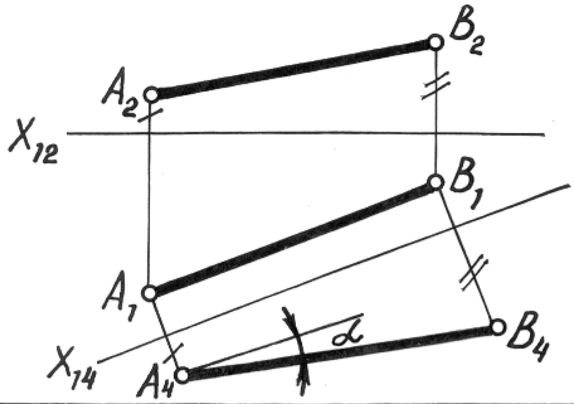


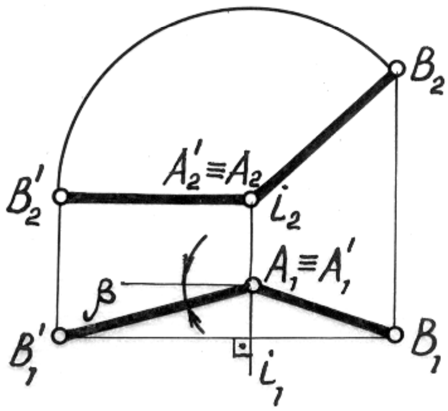
Рис. 19

Визначення кута між прямою та площиною проекцій

а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо проектуючої прямої



в) способом плоскопаралельного переміщення

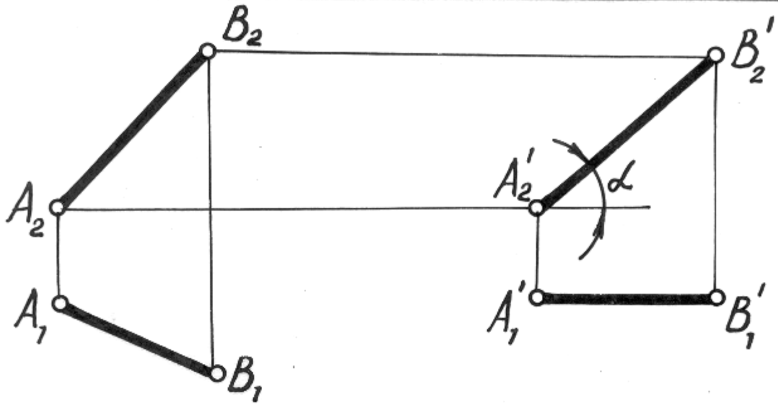
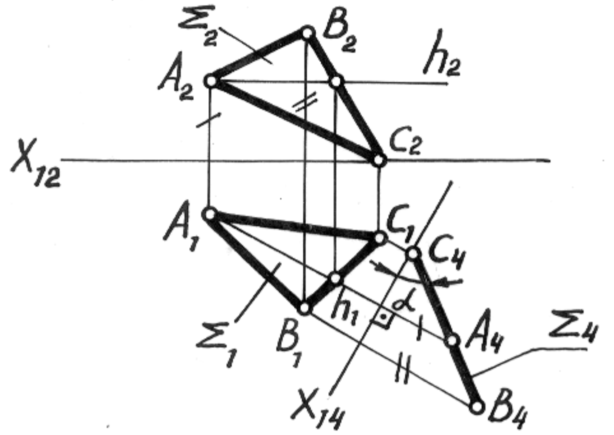


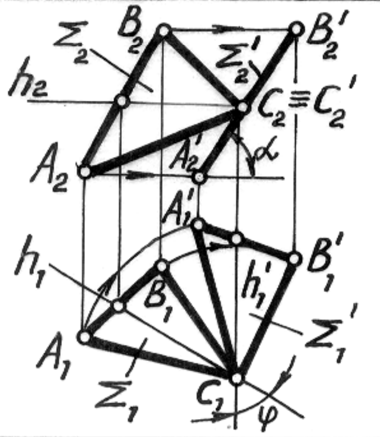
Рис. 20

Визначення кута нахилу площини до площин проекцій

а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо проектуючої прямої



в) способом плоскопаралельного переміщення

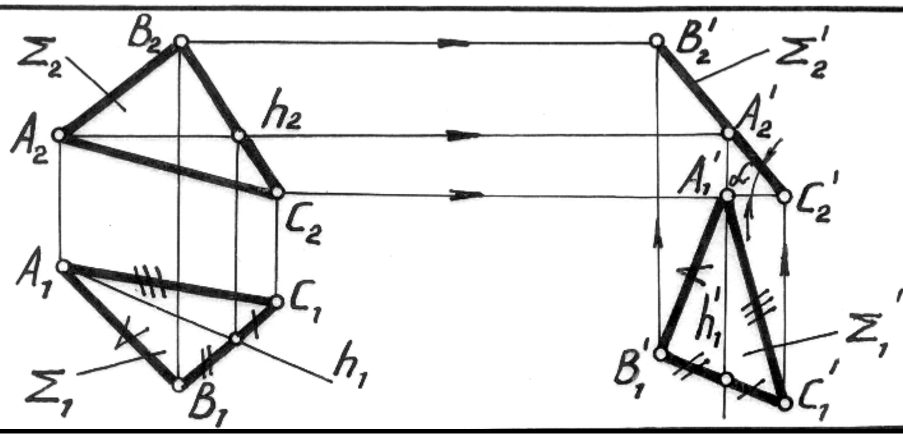


Рис. 21

Для цього проводимо будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) площини й обертаємо її горизонтальну проекцію h_1 до положення, перпендикулярного до $П_2$ ($h_1 \perp X_{12}$), на кут φ навколо осі, що проходить через вершину С перпендикулярно до $П_1$ (вісь на кресленні не показана).

Повертаємо на той же кут φ дві інші вершини трикутника. Побудова нової фронтальної проекції площини Σ'_2, яка перетворюється в пряму лінію, зрозуміло з кресленика. Кут α – шуканий;

в) способом плоскопаралельного переміщення (рис. 21 в).

Переміщуємо горизонтальну проекцію трикутника АВС так, щоб площина його стала фронтально-проектуючою, для цього будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) площини трикутника ставимо в положення, перпендикулярне до $П_2$ ($h'_1 \perp X_{12}$).

Побудова нової фронтальної проекції площини зрозуміло з кресленика. Кут α – шуканий.

Задача 10. Визначити кут між прямими, які перетинаються (рис. 22).

Якщо площина кута паралельна до будь-якої площини проекцій, то даний кут проектується на неї без спотворення.

Розв'язання:

а) способом заміни площин проекцій (рис. 22 а).

Задача вирішується дворазовою заміною площин проекцій, кінцевою метою якої є перетворення площини загального положення, утвореної даними прямими, у площину рівня.

Спочатку нову площину проекцій $П_4$ ставимо перпендикулярно до площини $\Sigma(b \cap c)$, тобто до будь-якої її горизонталі ($X_{14} \perp h_1$). Таким чином, площина Σ перетвориться в проектуючу (Σ_4) до $П_4$. Далі площину проекцій $П_5$ розташовуємо паралельно до Σ_4($X_{45} \| \Sigma_4$) і визначаємо в новій системі площин проекцій шуканий кут φ.

б) способом обертання навколо лінії рівня (рис.22 б)

У площині $\Sigma(b \cap c)$ будуємо будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) і повертаємо площину до положення площини рівня, паралельної до $П_1$.

Точки 1 і 2, що лежать на осі обертання, залишаються при обертанні на цьому ж місці: $1_1 \equiv 1'_1$ і $2_1 \equiv 2'_1$. Точка А обертається в площині Т, перпендикулярній до осі обертання.

Визначивши натуральну величину радіуса обертання точки А способом прямокутного трикутника, відкладаємо її від точки O_1 на сліді площини T_1. Отриману точку A'_1 з'єднуємо з $1'_1$ і $2'_1$. Кут φ – шуканий. Слід зазначити, що розв'язання даної задачі цим способом є найбільш раціональним.

в) способом плоскопаралельного переміщення (рис. 22 в).

Спочатку площину кута переміщуємо так, щоб вона стала фронтально-проектуючою. Для цього розташовуємо горизонтальну проекцію горизонталі (h'_1) перпендикулярно до осі X_{12}. Потім добудовуємо фронтальну проекцію h'_2 і A'_2.

Другим переміщенням робимо площину кута паралельною до площини $П_1$. Для цього розташовуємо проекцію $h''_2A''_2$ паралельно до осі X_{12}. На горизонтальній проекції визначається шуканий кут φ.

Задача 11. Визначити кут між мимобіжними прямими (рис. 23).

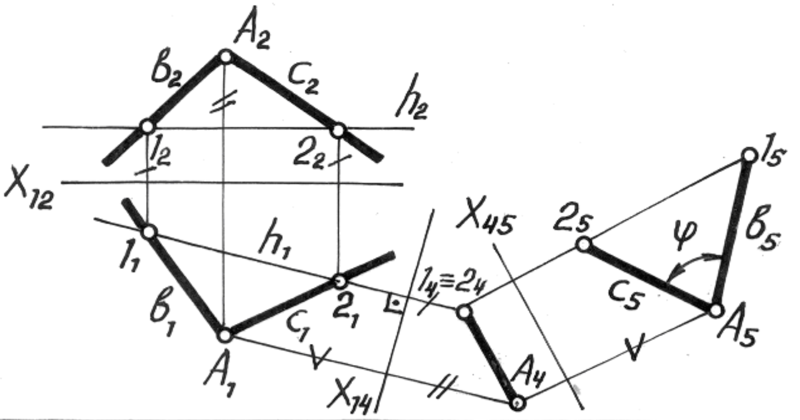
Кут між мимобіжними прямими визначається величиною плоского кута, утвореного двома перетинними прямими, відповідно паралельними до даних мимобіжних.

Через довільно вибрану точку К ($К_1$, $К_2$) простору проводимо прямі b і c, що перетинаються і паралельні до заданих мимобіжних m і n (b_1 і c_1 відповідно паралельні до m_1 і n_1, а b_2 і c_2 – m_2 і n_2).

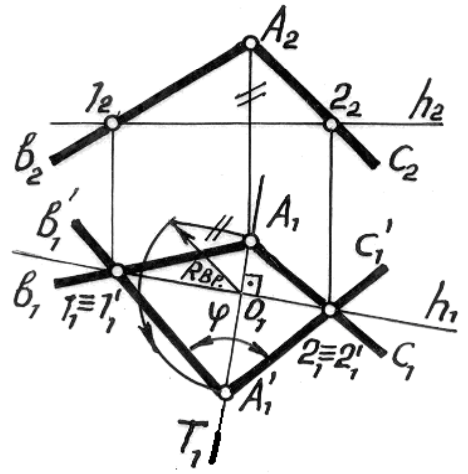
Розв'язання задачі зводиться до визначення кута між перетинними прямими, і раніше розглянуто в задачі 10 даного розділу (рис. 22).

Визначення кута між прямими, які перетинаються

а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо лінії рівня



в) способом плоскопаралельного переміщення

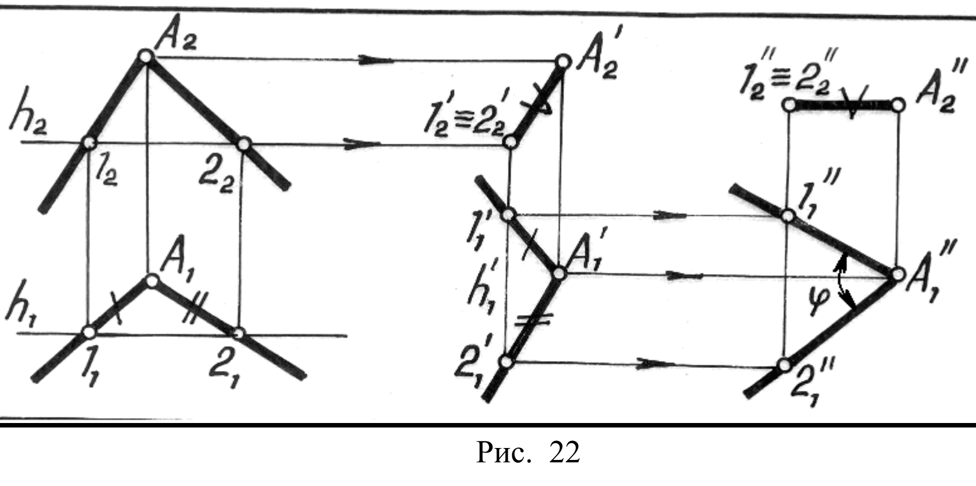


Рис. 22

Визначення кута між мимобіжними прямими

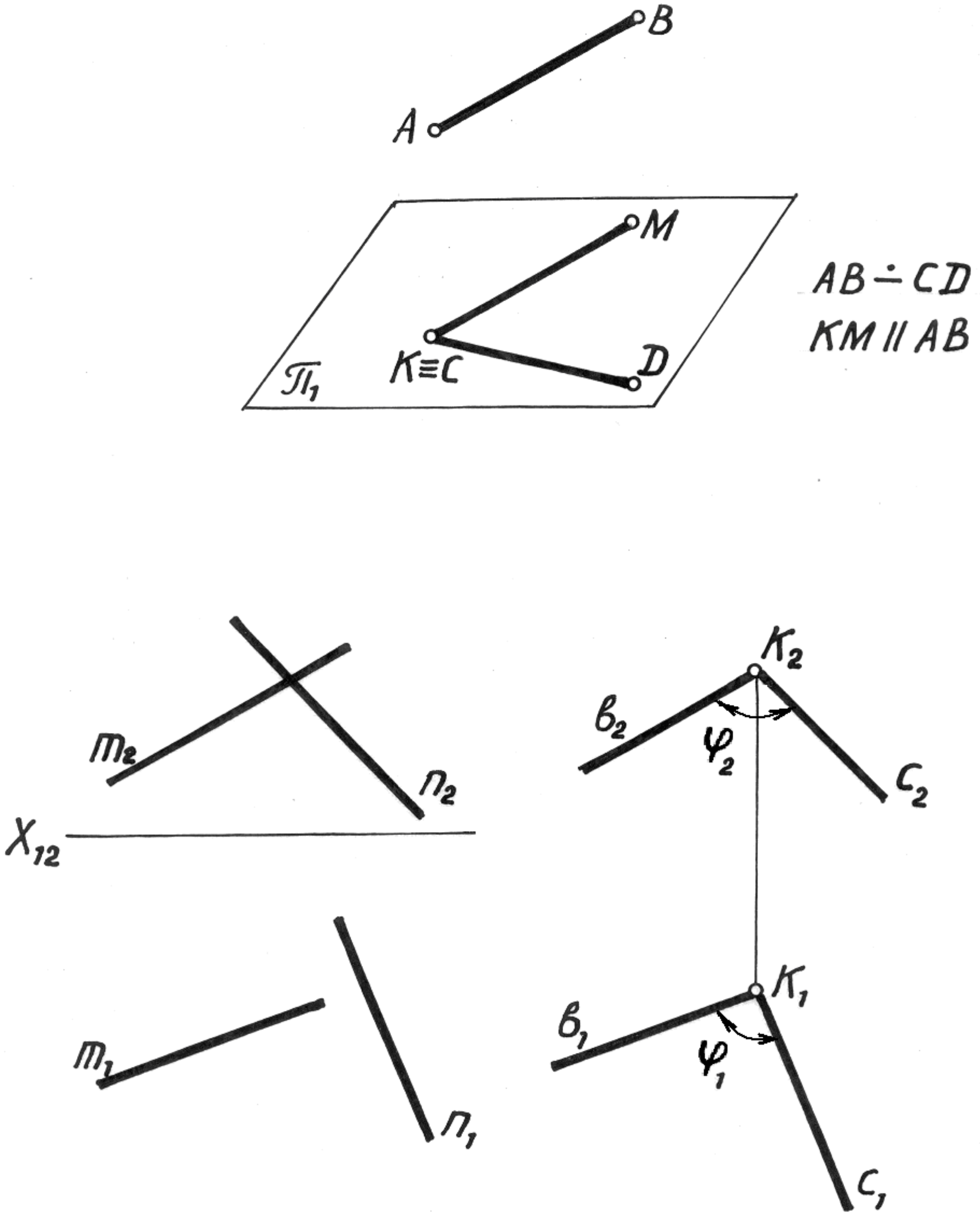


Рис. 23

Задача 12. Визначити кут нахилу прямої до площини загального положення (рис. 24).

Кутом між прямою ℓ і площиною Σ називається гострий кут φ між прямою і її проекцією KN на цю площину.

Розв'язання.

а) за допомогою додаткового кута (рис. 24 а).

Для простоти розв'язання даної задачі визначають величину кута ψ, додаткового до кута φ (ΔDKN – прямокутний). Знайшовши кут ψ можна визначити величину кута φ із співвідношення $\varphi = 90° - \psi$.

З точки D (D_1, D_2), довільно обраної на прямій ℓ, проводимо проекції перпендикуляра m до площини трикутника ABC, для чого попередньо побудовані горизонталь і фронталь площини ($m_1 \perp h_1$ і $m_2 \perp f_2$). Одержуємо проекції додаткового кута ψ. Визначивши натуральну величину цього кута обертанням навколо горизонталі h (h_1, h_2) (побудова розглянута раніше в задачі 10 цього розділу, рис. 22) і добудувавши його до 90°, визначимо шуканий кут φ.

б) Комбінованим способом (способом заміни площин проекцій і способом обертання) (рис. 24 б).

Щоб побачити шуканий кут між прямою AB і площиною Σ(ΔBCD) в натуральну величину, перетворимо заміною площин проекцій площину трикутника в проектуючу Σ_4($\pi_4 \perp \Sigma$; $h_1 \perp X_{14}$). Будуємо в цій системі пряму AB (A_4B_4). Кут між A_4B_4 і площиною Σ_4 не буде шуканим, тому що проектується із спотворенням на площину Π_4.

Обертанням навколо горизонтально-проектуючої прямої (на кресленні не показана), що проходить через точку B (B_1, B_2), визначаємо натуральну величину відрізка AB. З точки A_4 проводимо дугу радіусом, рівним натуральній величині AB, до перетину з Σ_4.

Отриманий кут φ – шуканий (2 відповіді).

Задача 13. Визначити кут між площинами загального положення (рис. 25).

Двогранний кут вимірюється лінійним кутом, отриманим у перетині граней двогранного кута площиною, перпендикулярною до обох граней двогранного кута, а отже і до лінії їхнього перетину, тобто до ребра двогранного кута.

Якщо це ребро виявиться перпендикулярним до будь-якої площини, то отримана на цій площині проекція двогранного кута виражає його лінійний кут.

Якщо на комплексному кресленні задано ребро двогранного кута (лінія перетину площин), то задачу рекомендується вирішувати способами а) чи б). У випадку відсутності на кресленику лінії перетину площин – способом в).

Розв'язання:

а) способом заміни площин проекцій (рис. 25 а).

Дворазовою заміною площин проекцій перетворюємо ребро BC (лінію перетину площин) у проектуючу пряму. Для цього спочатку площину проекцій Π_4 ставимо паралельно до прямої BC ($B_1C_1 \parallel X_{14}$), а потім площину Π_5 – перпендикулярно до прямої BC ($B_4C_4 \perp X_{45}$).

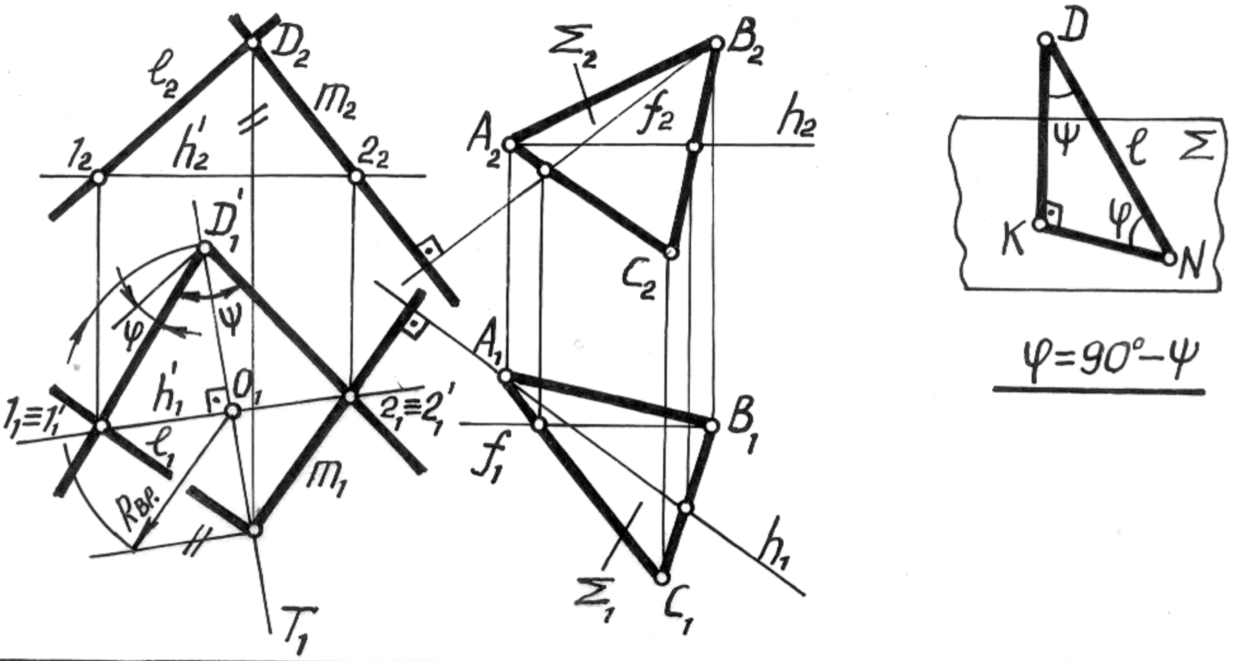
При цьому площини трикутників (граней) перетворяться в проектуючі до Π_5 (у вигляді відрізків D_5B_5 і B_5A_5), а кут $D_5B_5A_5$ – шуканий.

б) Способом плоскопаралельного переміщення (рис. 25 б).

Для розв'язання задачі двічі переміщуємо ребро BC до положення проектуючої прямої. Спочатку пряму BC переміщуємо до положення, паралельного до Π_2 ($B'_1C'_1 \parallel X_{12}$), зберігаючи відносне положення горизонтальних проекцій усіх точок. З точок A_2, B_2, C_2 і D_2 проводимо прямі, паралельні до X_{12} (сліди площин, у яких відбувається переміщення точок), і за допомогою ліній проекційного зв'язку, проведених з горизонтальних проекцій точок, знаходимо A'_2, B'_2, C'_2 і D'_2.

Визначення кута між прямою та площиною загального положення

а) при допомозі доповнювального кута



б) комбінованим способом (способом заміни площин і способом обертання)

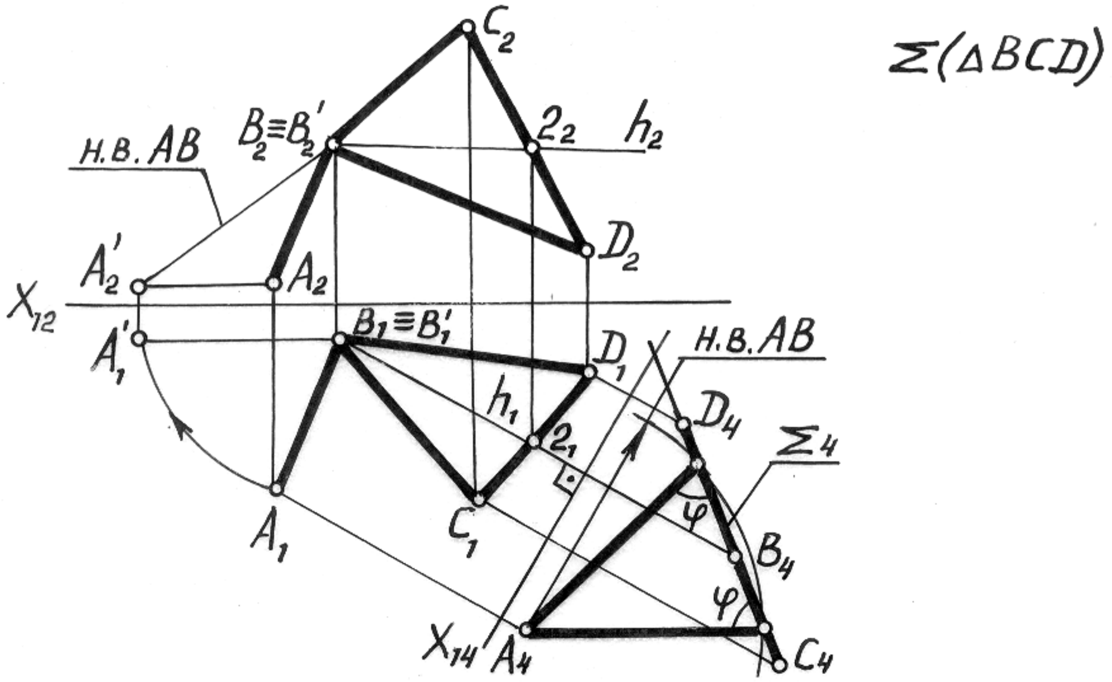
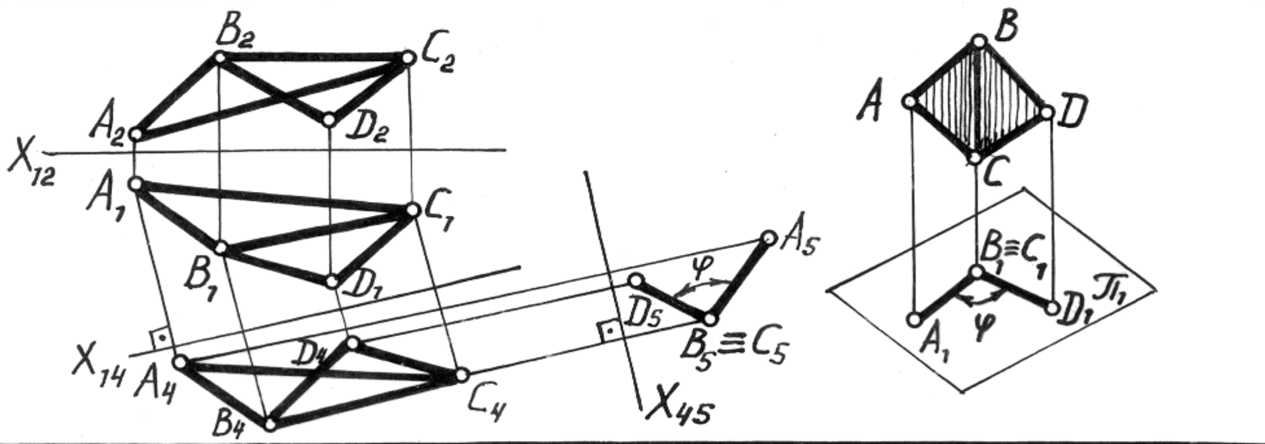


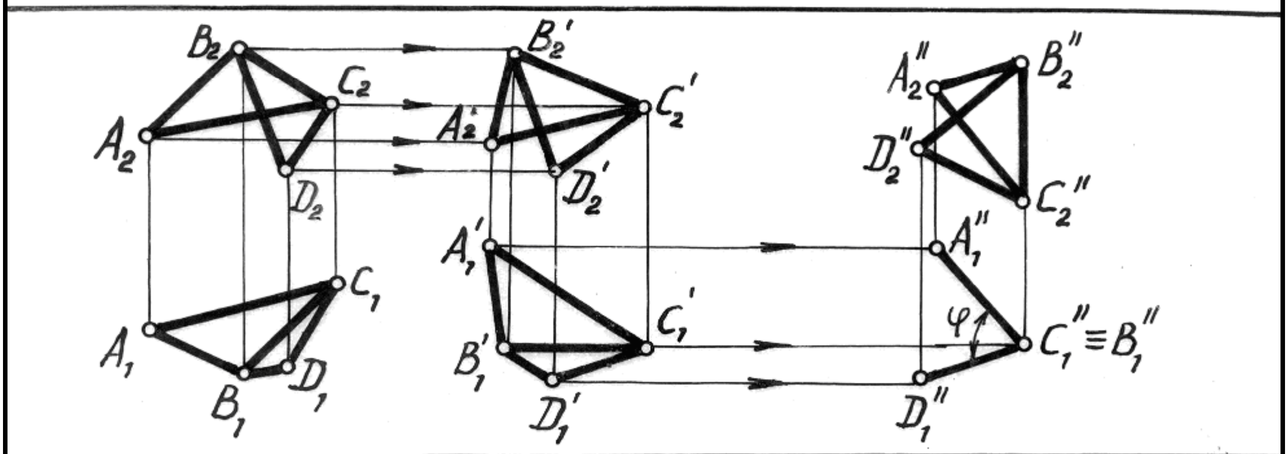
Рис. 24

Визначення кута між площинами

а) способом заміни площин проекцій



б) способом плоскопаралельного переміщення



в) при допомозі додаткового кута

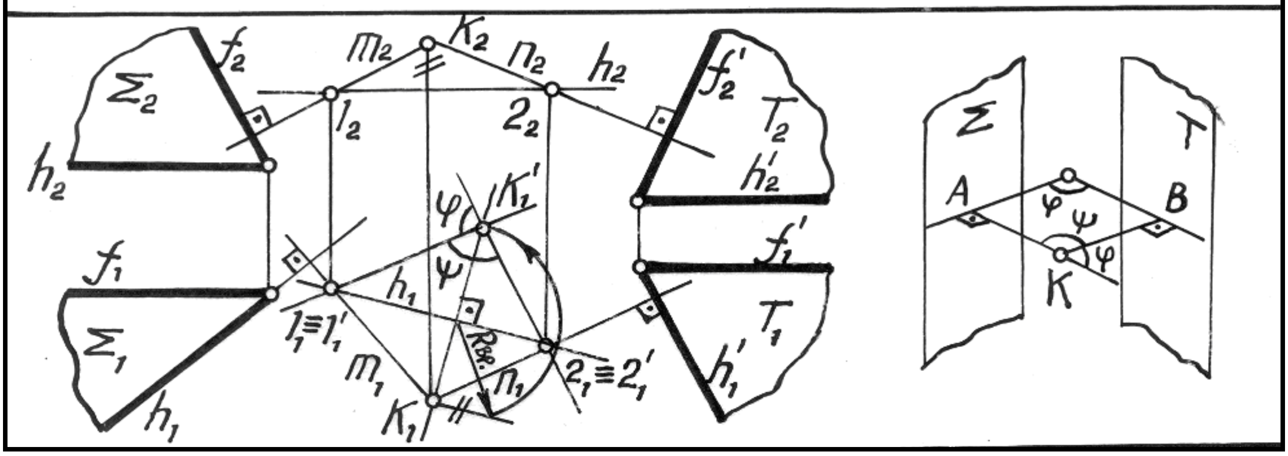


Рис. 25

Потім, зберігаючи незмінним відносне положення A'_2, B'_2, C'_2 і D'_2, переміщуємо їх таким чином, щоб пряма $B''_2C''_2$ стала проектуючою по відношенню до Π_1 ($B''_2C''_2 \perp X_{12}$). На горизонтальній проекції одержуємо шуканий кут φ.

в) За допомогою додаткового кута (рис. 25 в).

У випадках, коли на кресленику відсутня лінія перетину площин Σ і Т в явному вигляді, визначають не безпосередньо кут φ, а додатковий кут ψ між перпендикулярами КА і КВ, проведеними з будь-якої точки К простору на задані площини. Знайшовши кут ψ, одержимо кут φ як $\varphi = 180° - \psi$.

Вибрав довільну точку К (K_1, K_2) у просторі, проведемо з неї перпендикуляри до площин Σ ($h \cap f$) і Т ($h' \cap f'$):

$m \perp \Sigma$ ($m_1 \perp h_1$; $m_2 \perp f_2$) і $n \perp T$ ($n \perp h'_1$; $n_2 \perp f'_2$).

Таким чином маємо проекції кута ψ ($1_1K_12_1$ і $1_2K_22_2$).

Дійсна величина цього кута отримана обертанням навколо горизонталі 1-2 (див. задачу 10, пункт б, рис. 22). Визначивши дійсну величину додаткового кута ψ і добудувавши його до 180°, одержуємо шуканий кут φ.

2.2.4 Визначення дійсної величини плоских фігур

Якщо площина Σ паралельна до будь-якої площини проекцій, то вона проектується на неї в дійсну величину. Тому розв'язання задачі такого роду зводиться до перетворення площини Σ загального положення в площину рівня.

Задача 14. Визначити дійсну величину трикутника АВС (рис. 26 і рис. 27).

Розв'язання:

а) способом заміни площин проекцій (рис. 26 а).

Задача розв'язується дворазовою заміною площин проекцій. Спочатку замінюємо площину проекцій Π_2 на площину Π_4 і ставимо її перпендикулярно до площини Σ(ΔАВС). Для цього в площині Σ проводимо будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) і розташовуємо $X_{14} \perp h_1$. Для виконання цієї заміни на комплексному кресленику проводимо із горизонтальних проекцій A_1, B_1, C_1 лінії проекційного зв'язку, перпендикулярні до X_{14}, і відкладаємо на них висоти точок А, В и С, узяті з Π_2.

На Π_4 площина Σ перетворюється в пряму лінію Σ_4, то для її побудови на кресленику досить визначити положення двох будь-яких вершин трикутника АВС.

Потім замінимо площину проекцій Π_1 на площину Π_5, паралельну до площини Σ_4, тобто $X_{45} \parallel \Sigma_4$. Для побудови Σ_5 проводимо лінії зв'язку з проекцій A_4, B_4 і C_4 перпендикулярно X_{45} і відкладаємо на них відстань від A_1, B_1 і C_1 до осі X_{14}.

У системі площин проекцій Π_4 і Π_5 площина Σ є площиною рівня відносно площини Π_5.

Проекція $A_5B_5C_5$ – дійсна величина трикутника АВС.

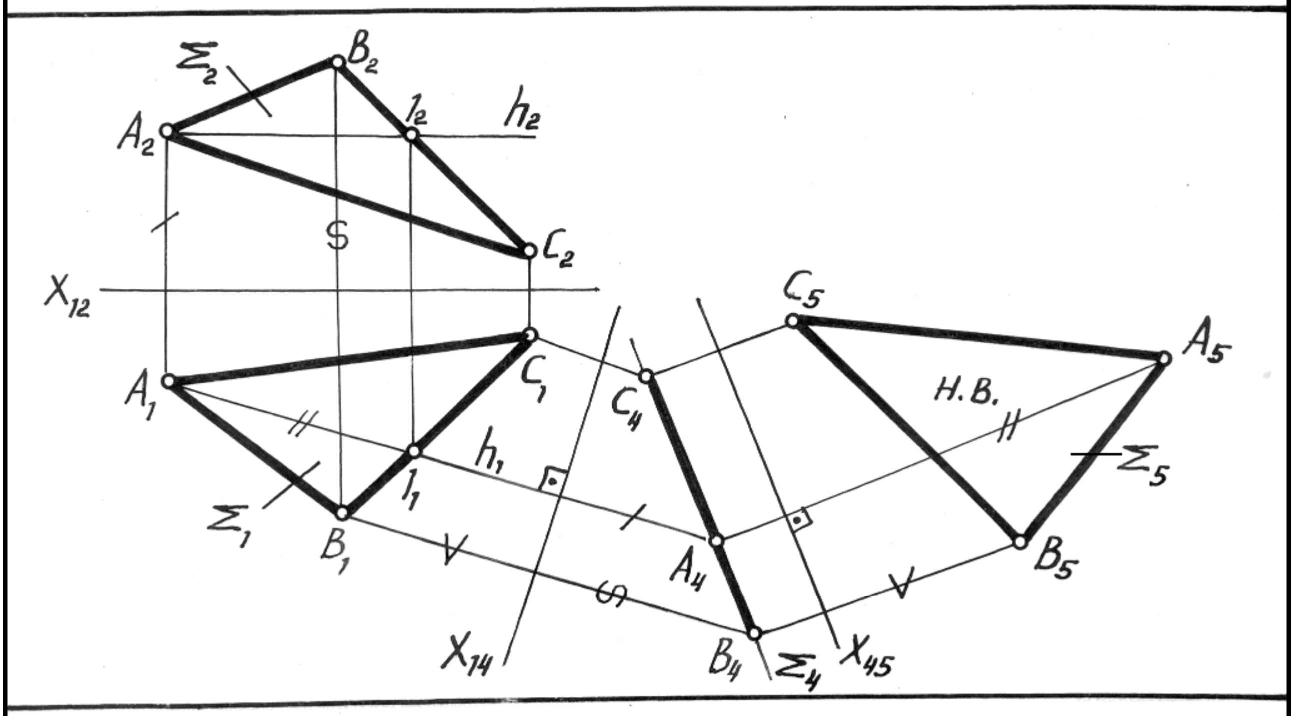
б) Способом обертання навколо проектуючої прямої (рис. 26 б).

Задача розв'язується дворазовим обертанням. Спочатку обертаємо площину Σ(ΔАВС) навколо горизонтально-проектуючої прямої q (q_1, q_2), яка проходить крізь точку С, до положення фронтально-проектуючої площини. Для цього обертаємо її навколо $q \perp \pi_1$ так, щоб горизонталь h (h_1, h_2) площини Σ стала фронтально-проектуючою прямою. При цьому горизонтальна проекція h_1 горизонталі h займе положення $h'_1 \perp X_{12}$, звідси визначається кут повороту $\varphi = 1_1C_11'_1$. Повертаємо на такий саме кут навколо прямої q точки А і В у тому ж напрямку.

Фронтальні проекції точок A'_2, B'_2 і C'_2 розташуються на одній прямій, яка є фронтальною проекцією площини Σ'_2.

Визначення натуральної величини плоскої фігури

а) способом заміни площин проекцій



б) способом обертання навколо проектуючої прямої

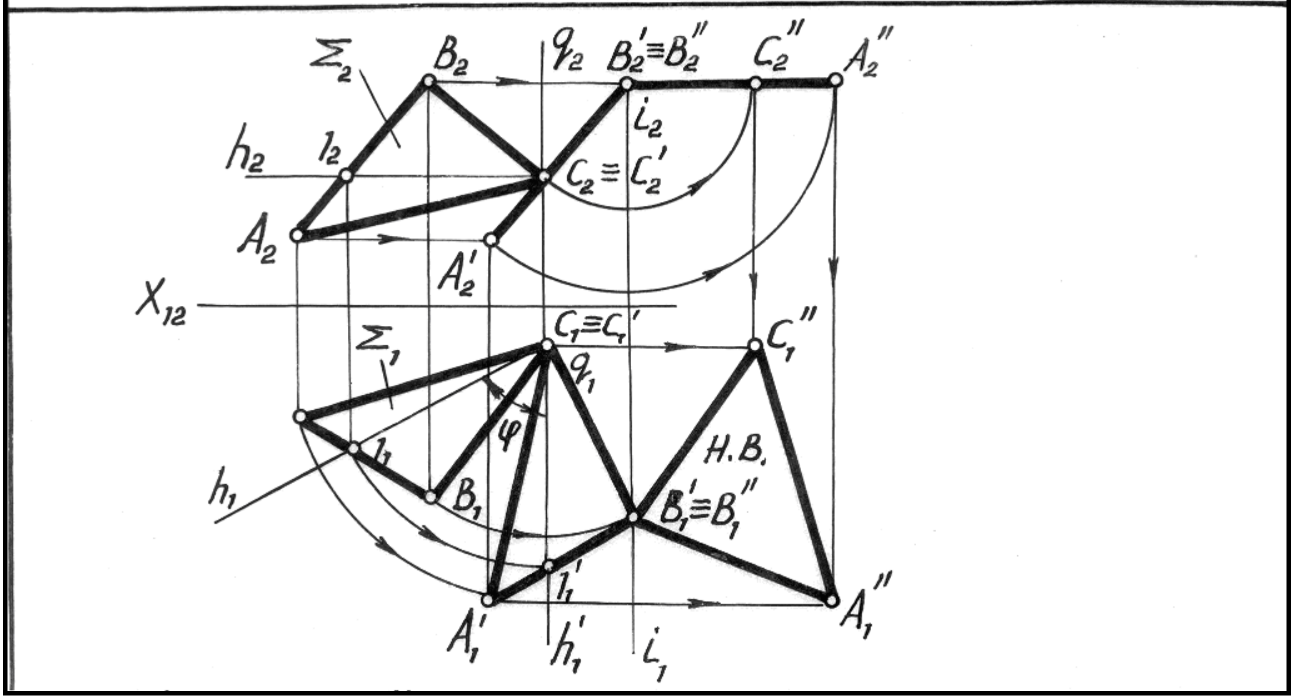
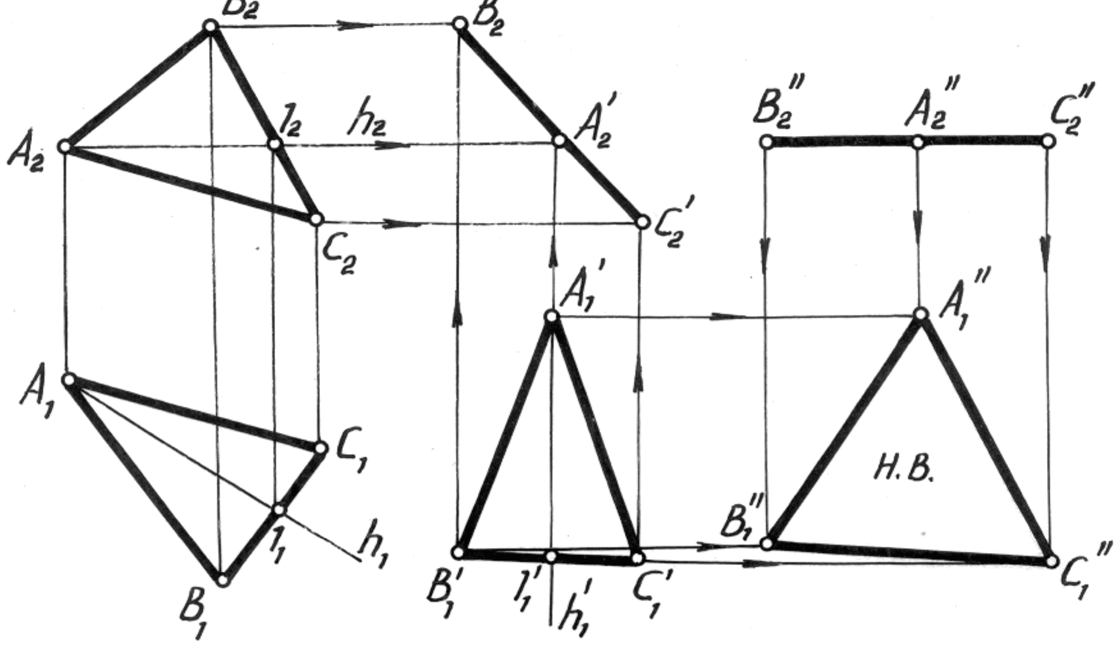


Рис. 26

Визначення натуральної величини плоскої фігури

а) способом плоскопаралельного переміщення



б) способом обертання навколо лінії рівня

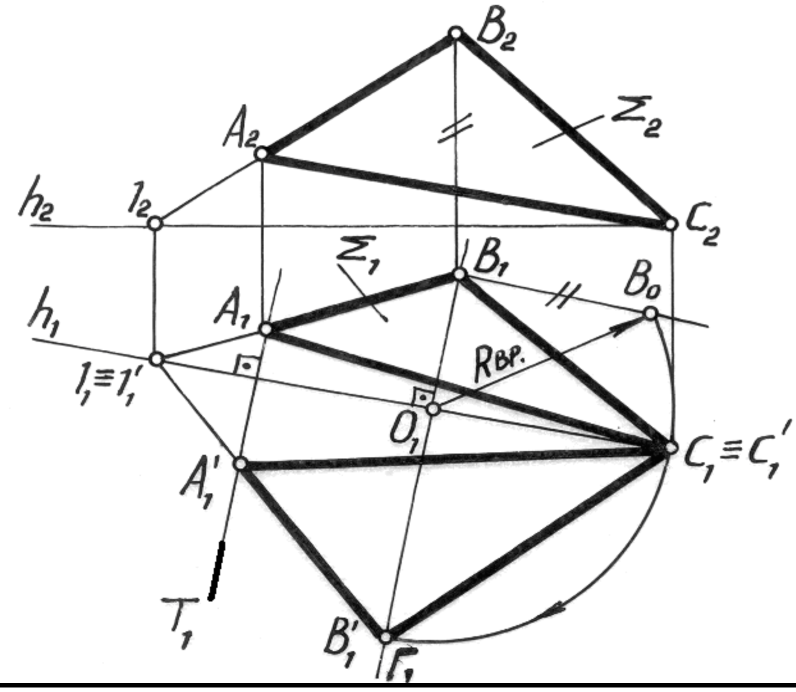


Рис. 27

Друге обертання площини Σ зробимо навколо осі i (i_1, i_2) $\perp$ π_2, яка проходить крізь точку B.

Фронтальні проекції точок A'_2, B'_2 і C'_2 будуть при цьому описувати дуги кіл з центром у точці i_2, а горизонтальні проекції переміщатися по прямих, перпендикулярних до i_1.

Повернувши площину $A'_2B'_2C'_2$ у горизонтальне положення $A''_2B''_2C''_2$ і побудувавши нову проекцію $A''_1B''_1C''_1$ трикутника на площині Π_1, одержимо дійсну величину трикутника ABC.

а) Способом плоскопаралельного переміщення (рис. 27 а).

Задача розв'язується подвійним плоскопаралельним переміщенням. Спочатку переміщуємо площину трикутника ABC до положення фронтально-проектуючої площини. Для цього проводимо в площині трикутника будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) і ставимо її у фронтально-проектуюче положення ($h'_1 \perp X_{12}$), зберігаючи відносне положення всіх горизонтальних проекцій точок площини. Фронтальні проекції A_2, B_2 і C_2 будуть переміщатися по прямих, паралельних осі X_{12}, а їхні нові положення A'_2, B'_2 і C'_2 будуємо за допомогою ліній проекційного зв'язку.

Другим плоскопаралельним переміщенням робимо трикутник ABC горизонтальною площиною рівня, при цьому $C''_2A''_2B''_2$ стає паралельно до X_{12}.

Нові горизонтальні проекції A''_1, B''_1 і C''_1 вершин трикутника знайдемо в точках перетину ліній проекційного зв'язку з траєкторіями руху (паралельними до X_{12}) точок A'_1, B'_1 і C'_1. Отримана проекція $A''_1B''_1C''_1$ – дійсна величина трикутника ABC.

б) Способом обертання навколо лінії рівня (рис. 27 б).

Побудуємо в площині $\Sigma(\Delta ABC)$ будь-яку горизонталь h (h_1, h_2) (наприклад через вершину C) і навколо неї повернемо площину Σ до положення площини рівня. Точки 1 і C, що лежать на осі обертання, не змінюють свого положення, а точки A і B обертаються навколо горизонталі в площинах T і Г, перпендикулярних до неї.

Для визначення положення площини після повороту досить знайти нове положення точки B. Точка 0_1 перетину $Г_1$ і h_1 – проекція центра обертання точки B. Для визначення дійсної величини радіуса обертання точки B будуємо прямокутний трикутник $0_1B_1B_0$, у якого один катет – горизонтальна проекція 0_1B_1 шуканого радіуса, а другий катет B_1B_0 – різниця висот точки B і горизонталі h. Гіпотенуза 0_1B_0 трикутника – це дійсна величина радіуса обертання.

Дійсну величину радіуса обертання 0_1B_0 відкладаємо від точки 0_1 на $Г_1$. Отриману нову проекцію точки B'_1 з'єднуємо з точками $1'_1$ и C'_1. Точка перетину $1'_1B'_1$ і T_1 визначає положення A'_1.

Проекція $A'_1B'_1C'_1$ – дійсна величина трикутника ABC. Нова фронтальна проекція трикутника $A'_2B'_2C'_2$ збігається з h_2 (на кресленику не показана).

ЛІТЕРАТУРА ДО ЧАСТИН 1, 2

1. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 с.
2. Годик Е.И., Самофалов М.И. Атлас по проекционному черчению с поэтапным решением задач. – К.: Вища школа, 1979. – 75 с.
3. Засов В.Д., Иконникова Г.С., Крылов Н.Н. Задачник по начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1984. – 192 с.
4. Табор А.И., Колесникова Э.А. Инженерная графика. – М.: Высшая школа, 1985. – 176 с.
5. Локтев О.В. Короткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1985. – 136 с.
6. Локтев О.В., Числов П.А. Задачник по нарисній геометрії. – М: Вища школа, 1984. – 104 с.
7. Лусь В.И., Дмитриєв Ю.Г. Инженерная графика. Позиционные и метрические задачи. Методическая разработка. – Харьков: ХИИКС, 1989. – 49 с.
8. Михайленко В.Є., Пономарьов А.М. Інженерна графіка. – К.: Вища школа, 1990. – 303 с.
9. Начертательная геометрия: Учеб. для ВУЗов под ред. Н.Н. Крылова. – М.: Высшая школа, 1990. – 240 с.
10. Посвянский А.Д. Короткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1974. – 192 с.
11. Фролов С. А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
12. Чекмарев А.А. Інженерная графика. – М.: Высшая школа, 1988. – 335с.

ЧАСТИНА 3
ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ. РОЗГОРТКИ. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

3.1.Загальний принцип побудови лінії перетину поверхонь

Загальний прийом побудови лінії перетину полягає в тім, що спочатку знаходять точки перетину ребер чи твірних однієї поверхні з другою поверхнею, потім ребер чи твірних другої поверхні з першою. Для цього застосовують загальний спосіб, суть якого в тому, що задані поверхні перетинають площиною, чи поверхнею, яку називають посередником. При побудові лінії перетину поверхонь необхідно дотримувати визначеної послідовності:

а) Аналіз поверхонь, які перетинаються, і лінії перетину.

В залежності від виду і розташування поверхонь лінія перетину може бути просторовою чи плоскою, плавною чи ламаною, закономірного чи випадкового виду, симетричною чи несиметричною, але у всіх випадках – вона замкнута.

Перетин може бути повним, коли маємо дві замкнуті лінії перетину (контур входу і виходу), і неповним, коли не всі ребра й твірні беруть участь у перетині. У цьому випадку маємо одну замкнуту просторову ламану лінію чи плавну криву.

б) Визначення точок, обумовлених безпосередньо, тобто без будь-яких допоміжних побудов.

Часто розв’язування задачі значно спрощується, якщо одна з поверхонь є проекційною. У такому випадку однойменна проекція лінії перетину збігається з нарисом проекції проекційної поверхні в межах накладання контурів проекцій поверхонь, які перетинаються. Розв’язування зводиться до побудови другої проекції лінії перетину.

в) Побудова опорних і проміжних точок з урахуванням видимості.

При розв’язанні задач на взаємний перетин двох криволінійних поверхонь у лінії перетину розрізняють опорні (вищу і нижчу, найближчу, крайню ліву і крайню праву, точки перехідної видимості) і проміжні точки.

Характерні точки дають можливість визначити межі проведення допоміжних січних площин для побудови проміжних точок.

г) Встановлення послідовності з'єднання точок лінії перетину. Визначення ділянок лінії перетину з урахуванням видимості і видимих елементів поверхонь, що перетинаються.

Усі проміжні точки у визначеній послідовності з'єднують у замкнуту лінію. При цьому треба враховувати, що безпосередньо між собою з'єднуються тільки точки, що лежать на одній грані як першої так і другої поверхні чи по одну сторону від осі обертання.

При визначенні видимості лінії перетину на проекціях варто брати до уваги, що на видимій грані чи частині поверхні лінія перетину, що лежить на цій грані чи поверхні, також буде видимою.

Взаємний перетин граних поверхонь (пірамідальної та призматичної)

Рис. 28 а. Перетин неповний, тому що ребра призми A, B і C не перетинають грані піраміди, ребро піраміди SL також у перетині участь не приймає.

Лінія перетину – просторова ламана замкнута, несиметрична. Одна з поверхонь, що перетинаються (призма) – є горизонтально-проекційною. Отже горизонтальна проекція лінії перетину збігається з нарисом горизонтальної проекції призми в межах накладання проекцій обох поверхонь.

Рис. 28 б. Будуємо спочатку точки перетину ребер піраміди з гранями призми. За горизонтальними проекціями цих точок (1_1, 2_1, 3_1, 4_1), що знаходяться безпосередньо, будуємо їх фронтальні проекції (1_2, 2_2, 3_2, 4_2).

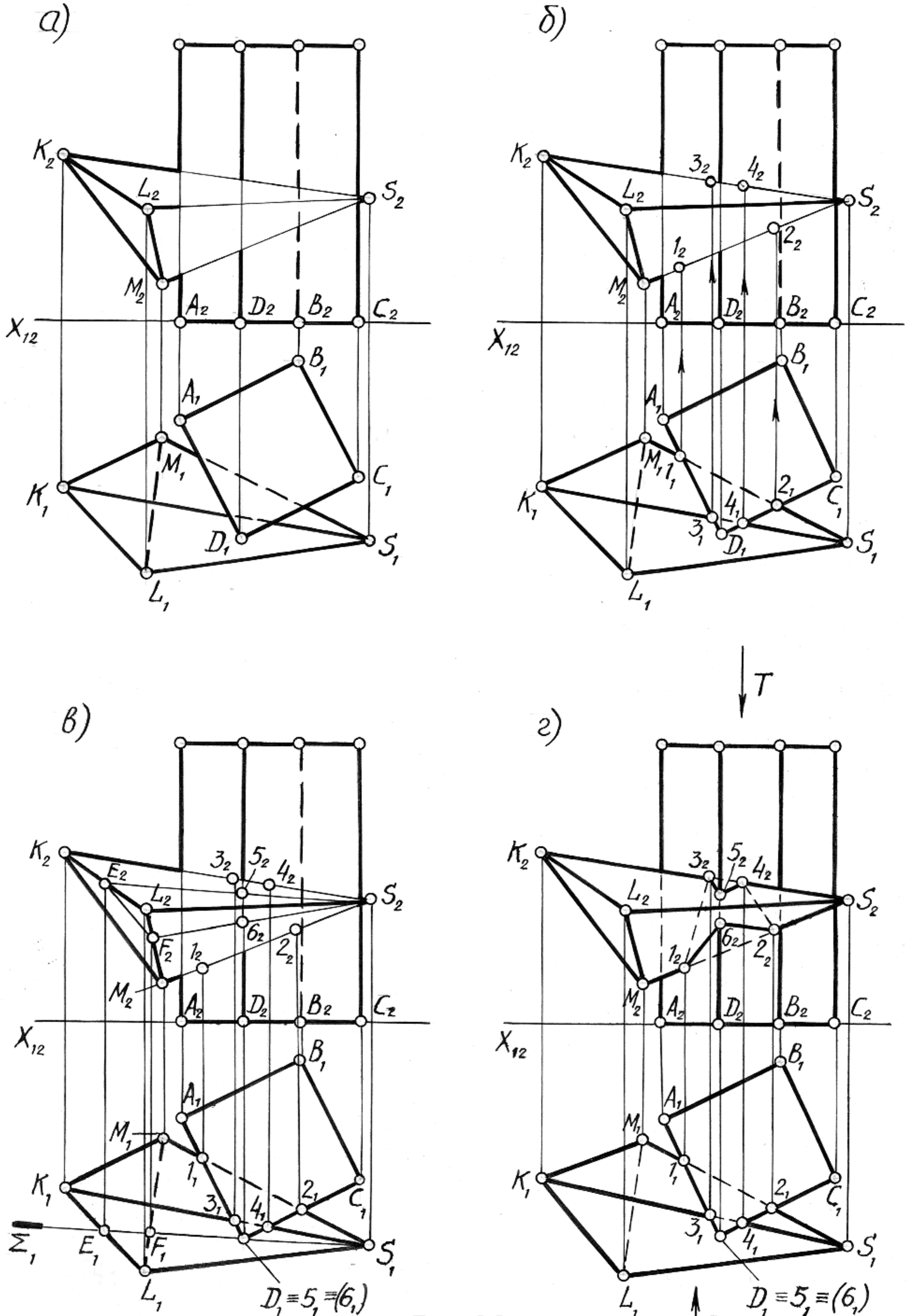

а)
б)
в)
г)
K_2
L_2
M_2
S_2
A_2
D_2
B_2
C_2
X_{12}
A_1
B_1
C_1
D_1
K_1
L_1
M_1
S_1
1_2
2_2
3_2
4_2
5_2
6_2
1_1
2_1
3_1
4_1
E_2
F_2
E_1
F_1
Σ_1
$D_1 \equiv 5_1 \equiv (6_1)$
T
R

Рис.28

Рис. 28 в. Будуємо точки перетину ребра D призми з поверхнею піраміди (точки 5 і 6), з цією метою проведемо через ребро D і вершину піраміди S допоміжну горизонтально-проекційну площину Σ. Ця площина перетне піраміду по трикутнику EFS. Точки 5 і 6 перетину ребра D з цим трикутником будуть точками його перетину з поверхнею піраміди.

Рис. 28 г. Для визначення послідовності з'єднання точок лінії перетину на фронтальній площині проекцій використовуємо її горизонтальну проекцію, що збігається з нарисом (виродженою проекцією) призми (1_1, 3_1, 5_1, (6_1), 4_1, 2_1). При цьому, наприклад, починаючи від точки 1_1 рухаємося проти годинникової стрілки через видимі на π_1 точки(1_1, 3_1, 5_1, 4_1, 2_1), а потім у зворотному напрямку через невидиму (для спостерігача, що дивиться в напрямку Т) точку 6_1 (2_1, 6_1, 1_1).

У підсумку на фронтальній площині проекцій одержуємо замкнуту ламану лінію (1_2, 3_2, 5_2, 4_2, 2_2, 6_2, 1_2), ділянки якої (1_2, 3_2) і (2_2, 4_2) невидимі, тому що належать невидимій (для спостерігача, що дивиться на π_2 по напрямку R) грані піраміди SKM.

3.3. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ГРАНОЇ ПОВЕРХНІ ТА КРИВОЛІНІЙНОЇ

3.3.1. Перетин пірамідальної поверхні з циліндричною

Перетин неповний, тому що ребра піраміди SC, SB не перетинають поверхню циліндра. Грані піраміди ASC і ASB, будучи площинами загального положення, перетинаються з поверхнею циліндра по несиметричній просторовій кривій, що складається з двох ланок плоских кривих 2-го порядку (еліпсів).

Одна з поверхонь, що перетинаються (циліндрична) – є проекціюючою відносно π_2. Отже фронтальна проекція лінії перетину збігається з нарисом циліндра в межах накладання проекцій обох поверхонь.

Рис. 29 а. Визначаємо на фронтальній площині проекцій точки перетину ребра піраміди AS з поверхнею циліндра, що знаходяться безпосередньо (1_2, 2_2). Добудовуємо горизонтальні проекції цих точок (1_1, 2_1).

Рис. 29 б. Крайня ліва нарисова і верхня твірна циліндра у перетині участь не приймають. Крайня права нарисова і нижня твірна циліндра перетинаються з поверхнею піраміди. Фронтальні проекції точок перетину цих твірних циліндра з пірамідою збігаються з проекціями твірних точок 3_2, 4_2, і 5_2, 6_2. Для побудови горизонтальної проекції використовуємо горизонтальні січні площини Σ і Δ.

Площини Σ і Δ перетинають піраміду по двох трикутниках,а циліндр – по прямокутниках, горизонтальні проекції яких перетинаються і дають точки 3_1, 4_1, 5_1, і 6_1.

Рис. 29 в. Для побудови будь-якої проміжної точки лінії перетину поверхонь використовуємо горизонтальні площини, наприклад T, що перетинають поверхню піраміди по трикутниках, а поверхню циліндра – по твірним. У взаємному перетині цих плоских перерезів на горизонтальній площині проекцій визначаємо проекції точок 7_1, 8_1. Для більш точної побудови лінії перетину варто провести кілька січних площин.

Рис. 29 г. Сполучаємо точки лінії перетину в порядку проходження по контуру підстави циліндра за годинниковою стрілкою. Наприклад, починаючи з точки 1_2 через видимі для спостерігача, що дивиться у напрямку К, точки 1_2, 3_2, 7_2, 5_2, 2_2, зберігаючи характер кривої, а потім у зворотному напрямку через невидимі точки 2_2, 6_2, 8_2, 4_2, 1_2.

У підсумку на горизонтальній площині проекцій одержуємо замкнуту лінію перетину, ділянки якої 3_1, 1_1, 4_1 видимі, тому що лежать на видимій для спостерігача, що дивиться по напрямку R, половині циліндра і видимій грані піраміди. Інші ділянки лінії перетину на π_1 – невидимі.

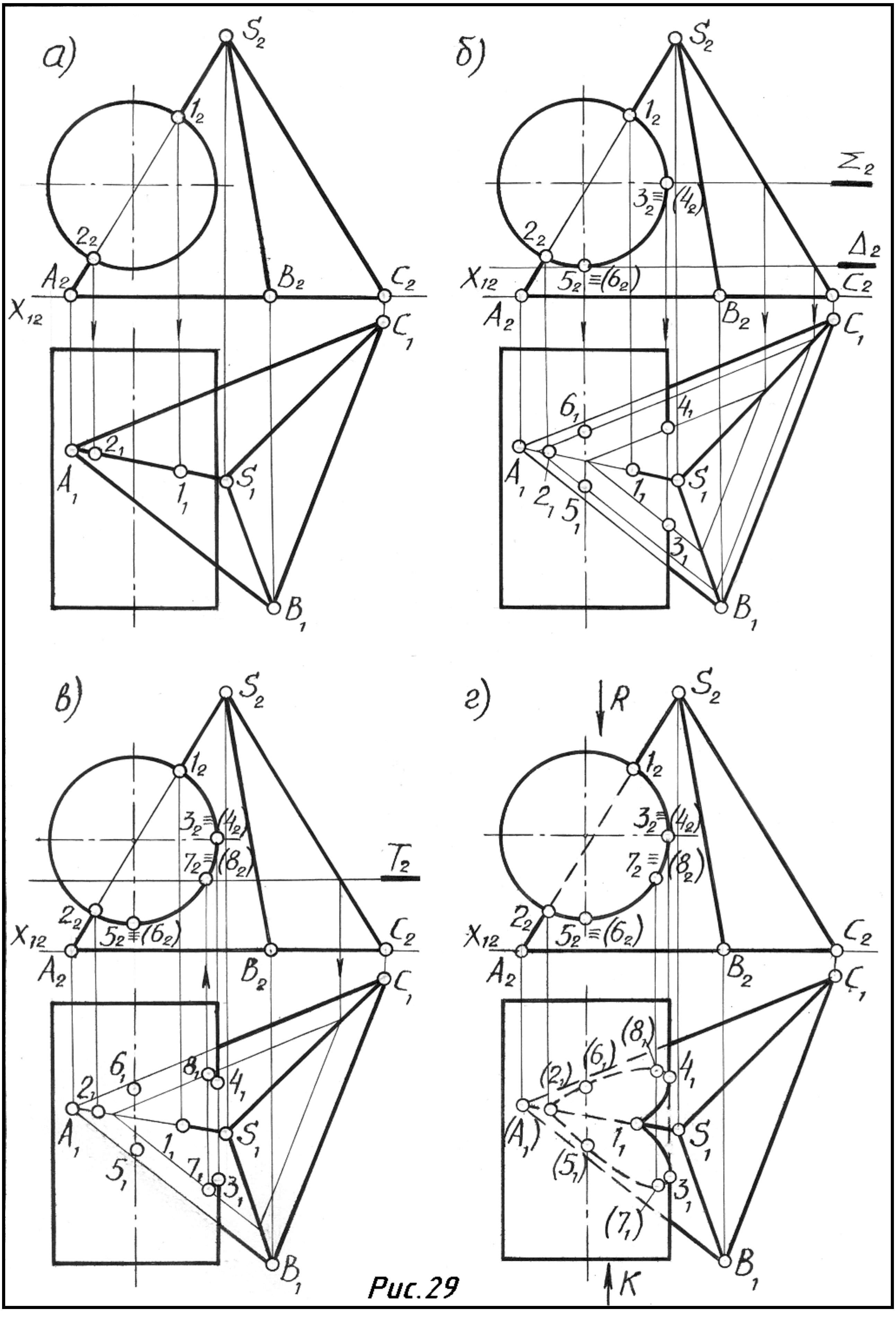


Рис.29

3.3.2. Перетин призматичної поверхні з конічною

Перетин повний, тому що всі ребра і грані призми перетинають поверхню конуса. Лінія перетину кривої поверхні з многогранною складається з плоских кривих, кожна з котрих є результатом переріза кривої поверхні однією гранню призми, тобто площиною. Точки, в яких ці плоскі криві сполучаються, є точками перетину ребер з поверхнею.

Рис. 30 а. Визначаємо насамперед точки перетину ребер призми з поверхнею конуса. Для цього проводимо через ребра допоміжні горизонтальні площини Г і Σ, що перетинають конус по колам, а призму по прямим, паралельним ребрам. На взаємному перетині їх одержуємо точки, що належать лінії перетину. Наприклад, горизонтальні проекції точок 1_1 і 3_1 визначені у результаті перетину горизонтальних проекцій ребер A_1 і C_1 з горизонтальною проекцією кола радіуса, що дорівнює відстані від осі конуса до точки 1_2^0. Горизонтальна проекція точки 2_1 визначена у результаті перетину горизонтальної проекції ребра B_1 з горизонтальною проекцією кола радіуса, що дорівнює відстані від осі конуса до точки 2_2^0. За горизонтальними проекціями точок 1_1, 2_1, 3_1 будуємо їхні фронтальні проекції 1_2, 2_2 і 3_2.

Рис. 30 б. Визначаємо точку перетину лівої нарисової твірної конуса SM з поверхнею призми. Для цього проводимо крізь неї допоміжну фронтальну площину Δ. Ця площина перетинає призму по трикутнику KLN, фронтальна проекція ($K_2L_2N_2$) якого, перетинаючи фронтальну проекцію твірної S_2M_2, дає фронтальну проекцію точки 4_2.

Рис. 30 в. Проміжні точки 5_1,6_1, і 5_2, 6_2 знайдені шляхом проведення на довільній висоті допоміжної горизонтальної площини Ω. Ця площина перетинає конус по колу, а призму по прямих ℓ і f, що паралельні до ребер, на взаємному перетині яких одержуємо точки лінії перетину. Для більш точної побудови лінії перетину варто провести кілька січних площин.

Рис. 30 г. З'єднуємо точки лінії перетину, що лежать на кожній із граней призми. На фронтальній площині проекцій видимою буде частина лінії перетину, що лежить одночасно на видимій (для спостерігача, що дивиться по напрямку R) грані AB (1_2, 5_2, 2_2) і видимій частині конуса. На горизонтальній площині проекцій ті ділянки лінії перетину видимі, що лежать на видимих (для спостерігача, що дивиться у напрямку T) гранях призми AB і BC (1_1, 5_1, 2_1 і 2_1, 4_1, 6_1, 3_1). Інша частина лінії перетину на π_1 (на грані AC) – невидима (3_1, 1_1).

3.3.3. Перетин призматичної поверхні зі сферичною

Перетин неповний, тому що ребра призми A і B у перетині участі не приймають. Грані призми AC і BC є горизонтально-проекційними площинами. Вони перетинають поверхню сфери по колах, які проекціюються на горизонтальну площину проекції у вигляді відрізків прямих ліній і збігаються із слідами площин граней призми AC і BC. Фронтальна проекція ліній перетину сфери гранями призми AC і BC – еліпси, малі осі яких F1 і E2, а великі – MN і KL.

Рис. 31 а. На горизонтальній площині проекцій визначаємо безпосередньо точки лінії перетину 1_1, 2_1, що лежать на горизонтальній проекції екватора поверхні сфери і точки $3_1 \equiv 4_1$ і $5_1 \equiv 6_1$, що лежать на горизонтальній проекції головного меридіана сфери. Відповідно знаходимо на π_2 положення фронтальних проекцій цих точок.

Рис. 31 б. Визначаємо точки перетину ребра C з поверхнею сфери (7 і 8). Для цього крізь ребро C проводимо допоміжну площину Σ. Ця площина розсікає поверхню сфери по колу, яке на π_2 проекціюється без спотворення. Точки 7_2 і 8_2 перетину фронтальної проекції ребра C_2 з цим колом є шуканими.

Рис. 31 в. Для побудови будь-якої проміжної точки лінії перетину поверхонь використовуємо фронтальні площини, наприклад Δ, що будуть перетинати поверхню сфери по колах, а призму по прямих, що паралельні до ребер.

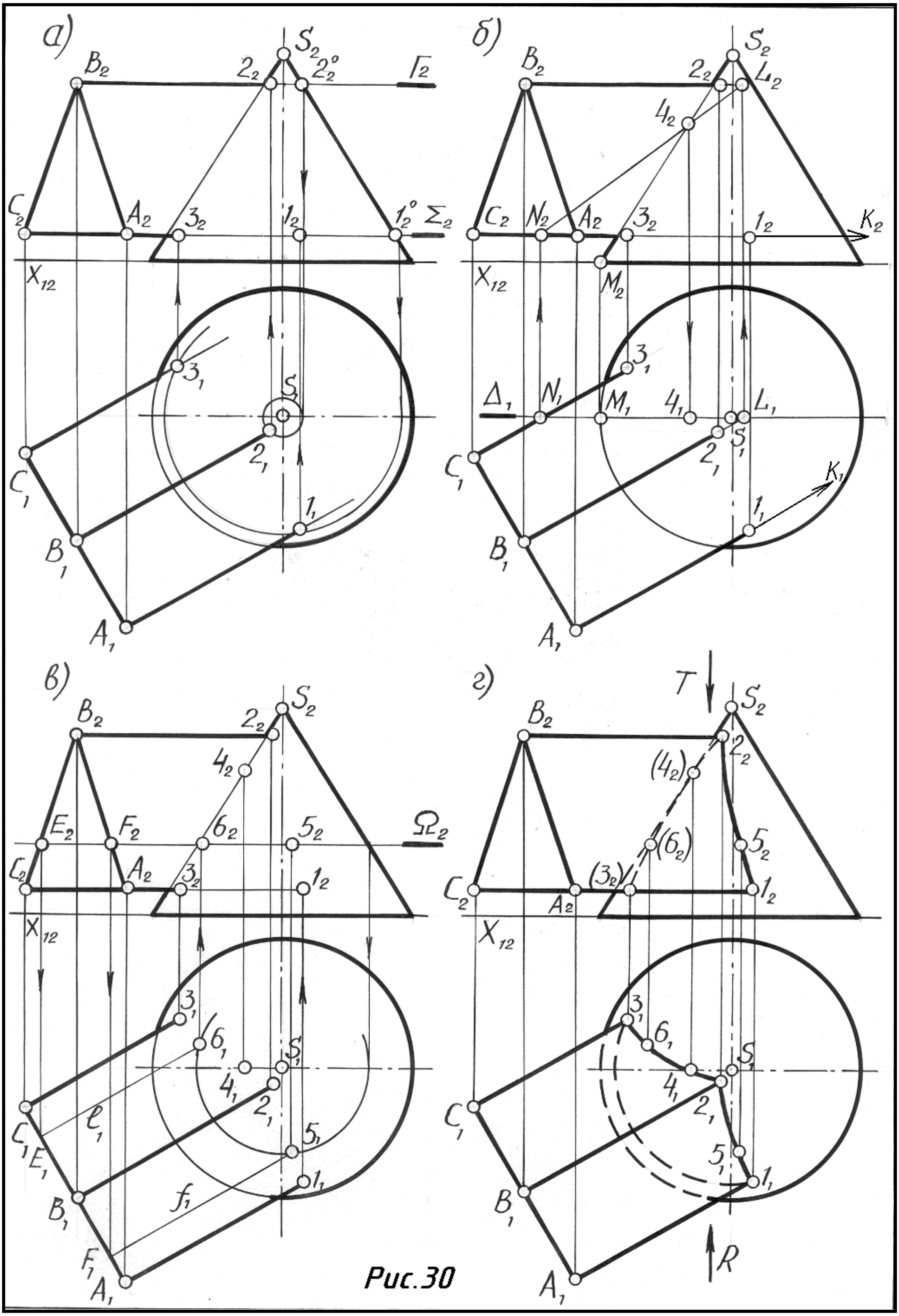

а)
б)
в)
г)
S_2
B_2
C_2
A_2
X_{12}
Γ_2
Σ_2
K_2
K_1
Δ_1
Ω_2
T
R
S_1
A_1
B_1
C_1
E_2
F_2
E_1
F_1
e_1
f_1
N_2
M_2
L_2
N_1
M_1
L_1
1_2
2_2
3_2
4_2
5_2
6_2
1_1
2_1
3_1
4_1
5_1
6_1

Рис.30

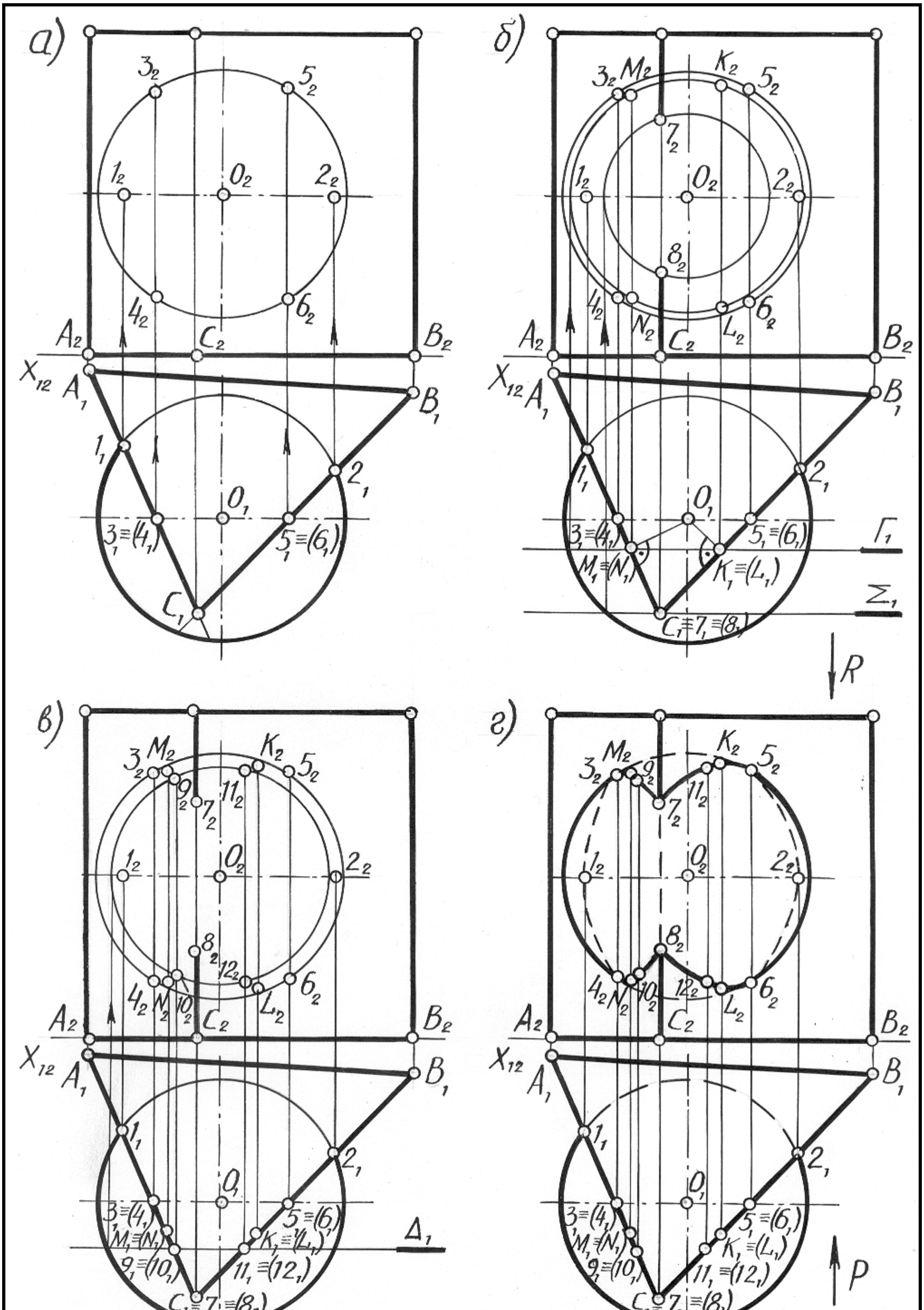


Рис.31

У перетині їхніх фронтальних проекцій визначаємо точки 9_2, 10_2, і 11_2, 12_2.

Для більш точної побудови лінії перетину варто провести кілька таких січних площин.

Рис. 31 г. З'єднуємо точки лінії перетину згідно характеру кривих в порядку розташування їх проекцій, наприклад, починаючи з точки 1_1 через видимі для спостерігача, що дивиться по напрямку R, (1_1, 3_1, M_1, 9_1, 7_1, 11_1, $К_1$, 5_1, 2_1), а потім у зворотному напрямку через невидимі, узяті в дужки, точки 2_1, 6_1, L_1, 12_1, 8_1, 10_1, N_1, 4_1, 1_1.

Лінія перетину на фронтальній площині проекцій має вигляд замкнутої кривої, ділянки якої 3_2, M_2, 9_2, 7_2, 11_2, $К_2$, 5_2 і 4_2, N_2, 10_2, 8_2, 12_2, L_2, 6_2 – видимі, тому що лежать на видимій половині сфери для спостерігача, що дивиться по напрямку Р, і видимих гранях призми АС і ВС. Інші ділянки лінії перетину невидимі.

3.3.4. Перетин призматичної поверхні з поверхнею тора

Перетин повний, тому що всі ребра призми перетинають поверхнею тора.

Лінія перетину – просторова замкнута, яка складається з плоских кривих. Одна з поверхонь, що перетинаються (призма), є горизонтально-проекційною, тому горизонтальна проекція лінії перетину збігається з її нарисом.

Рис. 32а. Побудову починаємо з горизонтальних проекцій точок 1_1 і 2_1, що знаходяться безпосередньо в місцях перетину горизонтальної проекції головного меридіана тора з горизонтальними проекціями граней АВ і ВС. По них будуємо фронтальні проекції 1_2 і 2_2, що є точками перехідної видимості лінії перетину на π_2.

Рис. 32б. Далі знаходимо точки перетину ребер призми з поверхнею тора, для чого застосовуємо допоміжні фронтальні площини рівня. Через ребро В проводимо площину Σ, що перетинає поверхню тора по колах радіусів R і r. На фронтальну площину проекцій ці кола проекціюються без спотворення і у місці перетину їх із фронтальною проекцією ребра B_2 одержуємо точку 3_2. Крізь грань АС проводимо площину Δ, що перетне поверхню тора по колах відповідних радіусів. Перетин цих кіл з ребрами А і С на π_2 дає фронтальні проекції точок 4_2 і 5_2.

Рис. 32в. Будь-яка проміжна точка будується таким же засобом (дивися побудову точок 6 і 7).

Рис. 32г. У підсумку на фронтальній площині проекцій одержуємо замкнуту криву, точки якої з'єднуємо у визначеній послідовності, очевидної з горизонтальної проекції (3_1, 6_1, 1_1, 4_1, 5_1, 2_1, 7_1, 3_1), дотримуючись характеру кривої на кожній грані. Частина лінії перетину між точками 1_2, 6_2, 3_2, 7_2, 2_2 видима, тому що лежить на видимих (для спостерігача, що дивиться по напрямку L) ділянках поверхні тора і граней призми АВ і ВС.

3.4. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН КРИВОЛІНІЙНИХ ПОВЕРХОНЬ (ЦИЛІНДРИЧНОЇ І СФЕРИЧНОЇ)

Рис. 33а. Лінія перетину – просторова крива 4-го порядку.

Точок лінії перетину, обумовлених безпосередньо, не має.

Для визначення точок лінії перетину, що лежать на екваторі сфери, проводимо через центр сфери горизонтальну площину Σ, що перетне сферу по екватору, а циліндр – по колу з центром в точці М. Ці два кола проекціюються на горизонтальну площину проекцій без спотворення, а точки 1_1 і 2_1 перетину їх проекцій є шуканими проекціями точок лінії перетину двох поверхонь. По них добудовуємо фронтальні проекції 1_2 і 2_2.

Для визначення точок лінії перетину, що належать головному меридіану, проводимо допоміжну фронтальну площину Δ через О. Ця площина перетинає циліндр по двом твірним, а сферичну поверхню – по нарисовому колу.

На взаємному перетині фронтальних проекцій цих перерізів визначаємо фронтальні проекції точок 3_2, 4_2, 5_2, 6_2. Добудовуємо горизонтальні проекції точок 3_1, 4_1, 5_1, 6_1 на Δ_1.

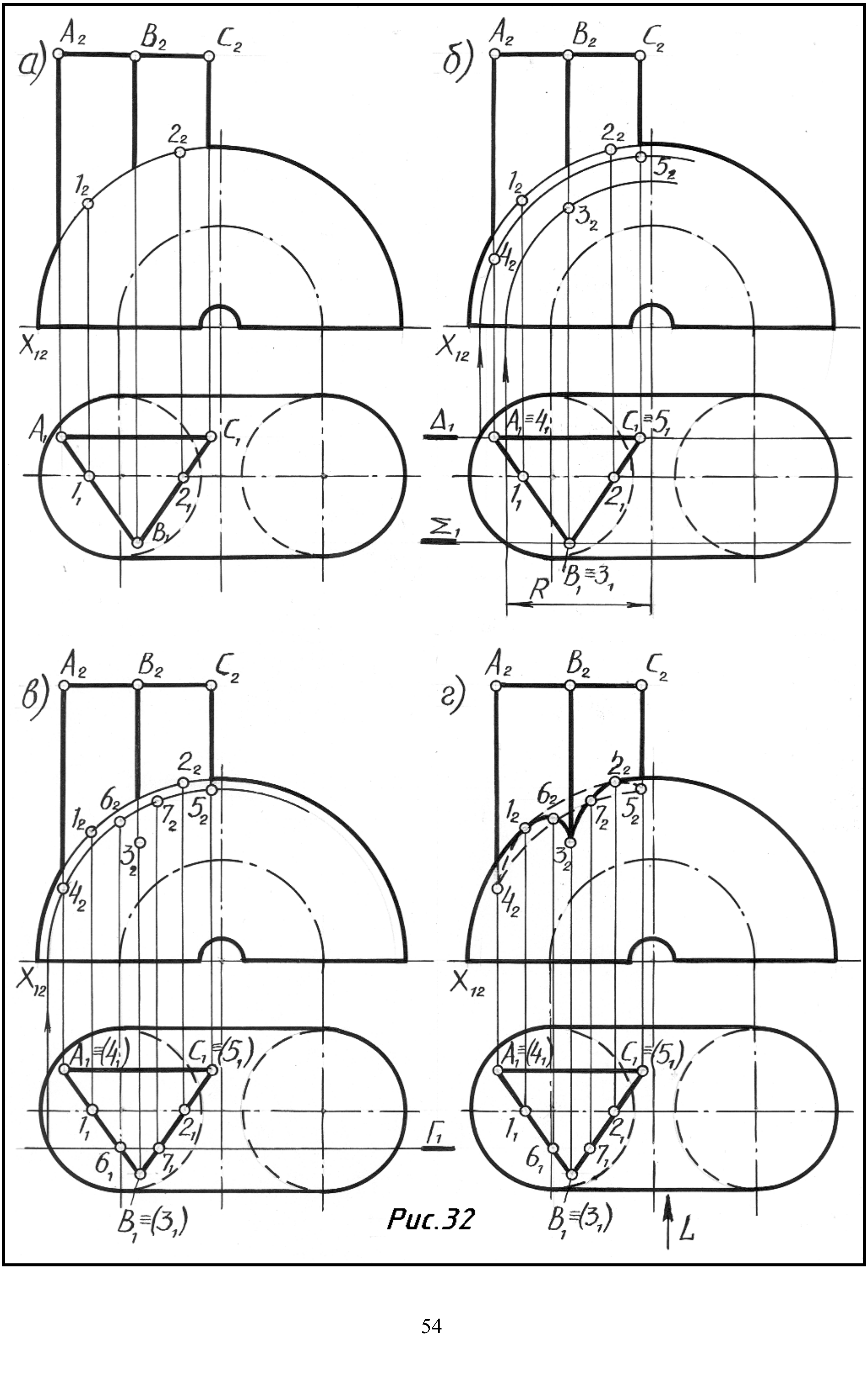


Рис.32

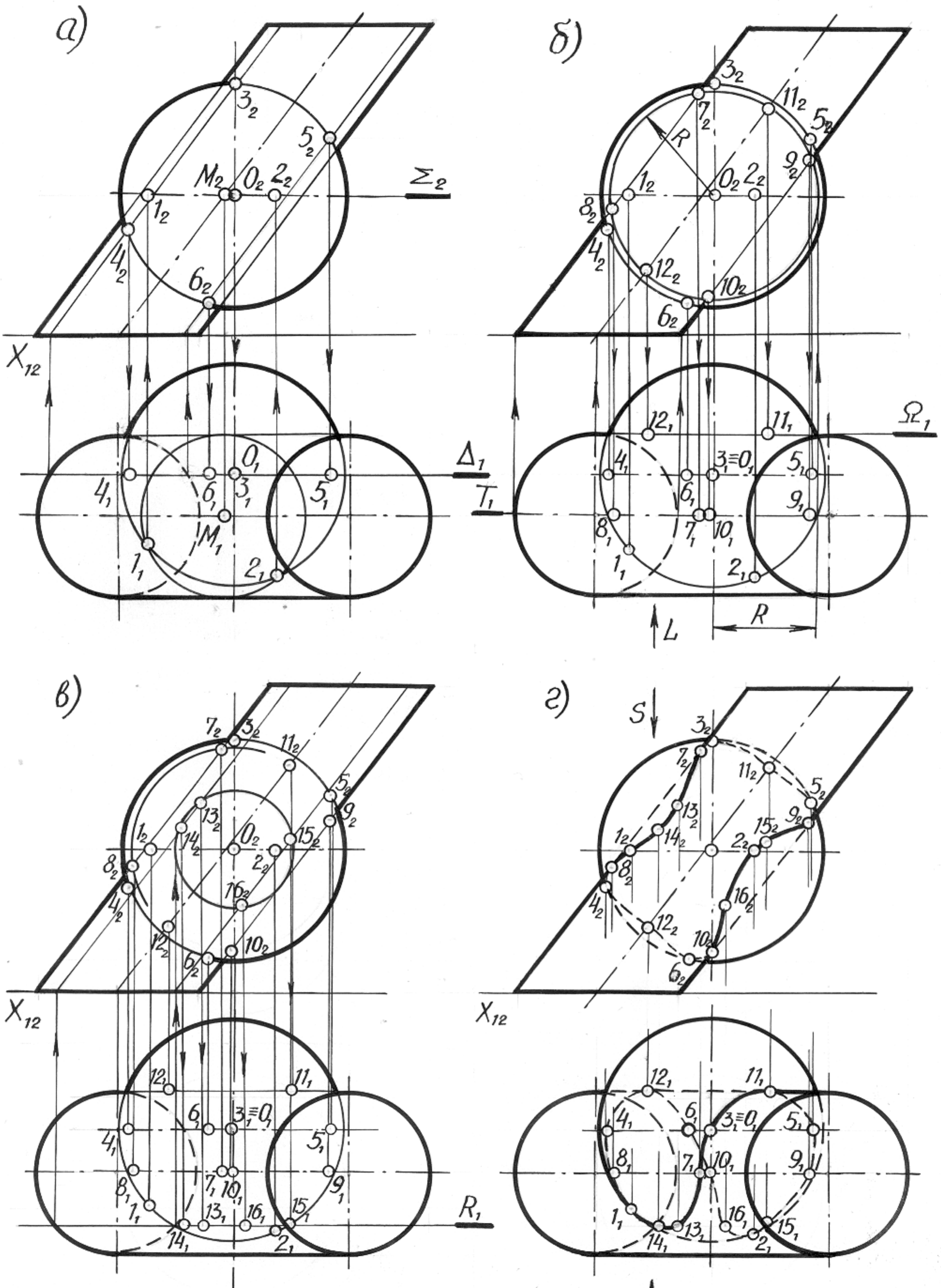


Рис.33

Рис. 33б. Для побудови точок лінії перетину, що лежать на нарисових твірних фронтальної проекції циліндра, проводимо фронтальну площину T через вісь циліндра,

Площина T розсікає поверхню циліндра по твірних, фронтальні проекції яких p_2 і q_2, а поверхню сфери по колу радіуса R, яке на фронтальну площину проекцій проекціюється без спотворення. На взаємному перетині цих перерізів визначаємо фронтальні проекції точок 7_2, 8_2, 9_2, 10_2.

Визначаємо точки лінії перетину, що лежать на нарисових твірних горизонтальної проекції циліндра. Ближня для спостерігача, що дивиться у напрямку L, твірна циліндра не перетинає поверхню сфери, тому що знаходиться поза її нарисом.

Для побудови точок далекої нарисової твірної горизонтальної проекції циліндра з поверхнею сфери проводимо через неї фронтальну площину Ω, яка перетинає поверхню сфери по колу, що проекціюється на фронтальну площину проекцій без спотворення і перетинає фронтальну проекцію цієї твірної в точках 11_2, 12_2, горизонтальні проекції яких відповідно добудовуються.

Рис. 33в. Для побудови будь-яких проміжних точок лінії перетину проводимо ряд допоміжних фронтальних площин (наприклад R), що перетинають циліндр по двом твірним, а поверхню сфери по колах, центри яких проектуються на фронтальну площину проекцій в O_2 – проекцію центра сфери. На взаємному перетині фронтальних проекцій цих перерізів визначаються точки, що належать лінії перетину.

Прикладом побудови проміжних точок лінії перетину є точки 13_2, 14_2, 15_2, і 16_2. Побудувавши ряд точок, ми можемо одержати досить ясне уявлення про лінію перетину даних поверхонь.

Рис. 33 г. У підсумку на горизонтальній площині проекцій одержуємо замкнуту лінію перетину, ділянки якої 1_1, 14_1, 13_1, 7_1, 3_1, 11_1 видимі, тому що лежать на видимих для спостерігача, що дивиться по напрямку S, твірних циліндра і на видимій половині сфери. На фронтальній площині проекцій одержуємо замкнуту криву, ділянки якої 8_2, 1_2, 14_2, 13_2, 7_2, і 9_2, 15_2, 2_2, 16_2, 10_2 видимі, тому що лежать на видимій для спостерігача, що дивиться по напрямку L, поверхні циліндра і видимої поверхні сфери.

3.5. ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ СПОСОБІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ КРЕСЛЕНИКА

3.5.1. Перетин пірамідальної поверхні із сферичною

Рис. 34 а. Перетин неповний, тому що ребра SB, SC і грань DSC в перетині участь не приймають. Лінія перетину – замкнута просторова симетрична крива, кожна ланка якої є частиною кола, що проекціюється на площини проекцій у вигляді частин еліпсів.

Визначаємо точки 1_2 і 2_2, що не вимагають спеціальних побудов, у місцях перетину фронтальної проекції головного меридіана сфери з фронтальною проекцією ребра A_2S_2. По них знаходимо горизонтальні проекції точок 1_1 і 2_1. Потім визначаємо точки лінії перетину 3 і 4, що лежать на екваторі поверхні сфери, що є точками перехідної видимості лінії перетину на π_1. Для цього через екватор сфери проводимо горизонтальну площину Σ, що перетинає піраміду по трикутнику EFG, а поверхню сфери по екватору. У перетині горизонтальних проекцій цього трикутника і екватора сфери одержуємо точки 3_1 і 4_1, по них будуємо фронтальні проекції точок 3_2 і 4_2.

Рис. 34б. У даному прикладі точка 1 є найвищою для лінії перетину. Найнижча точка 5 лежить на лінії t. Для її визначення перетворимо грань ASB в проекційну площину способом заміни площин проекцій (проводимо вісь X_{14} перпендикулярно до AB як до горизонталі площини ASB). Побудувавши сферу в новій системі площин проекцій з центром у точці O_4, знаходимо нижчу точку лінії перетину (точка 5_4) у місці перетину нарису сфери на π_4 із гранню ASB, що проекціюється у пряму A_4S_4. Для побудови точки 5_1 проводимо лінію зв'язку з точки 5_4 до перетину з горизонтальною проекцією t_1 лінії t. Потім будуємо фронтальну проекцію точки 5_2.

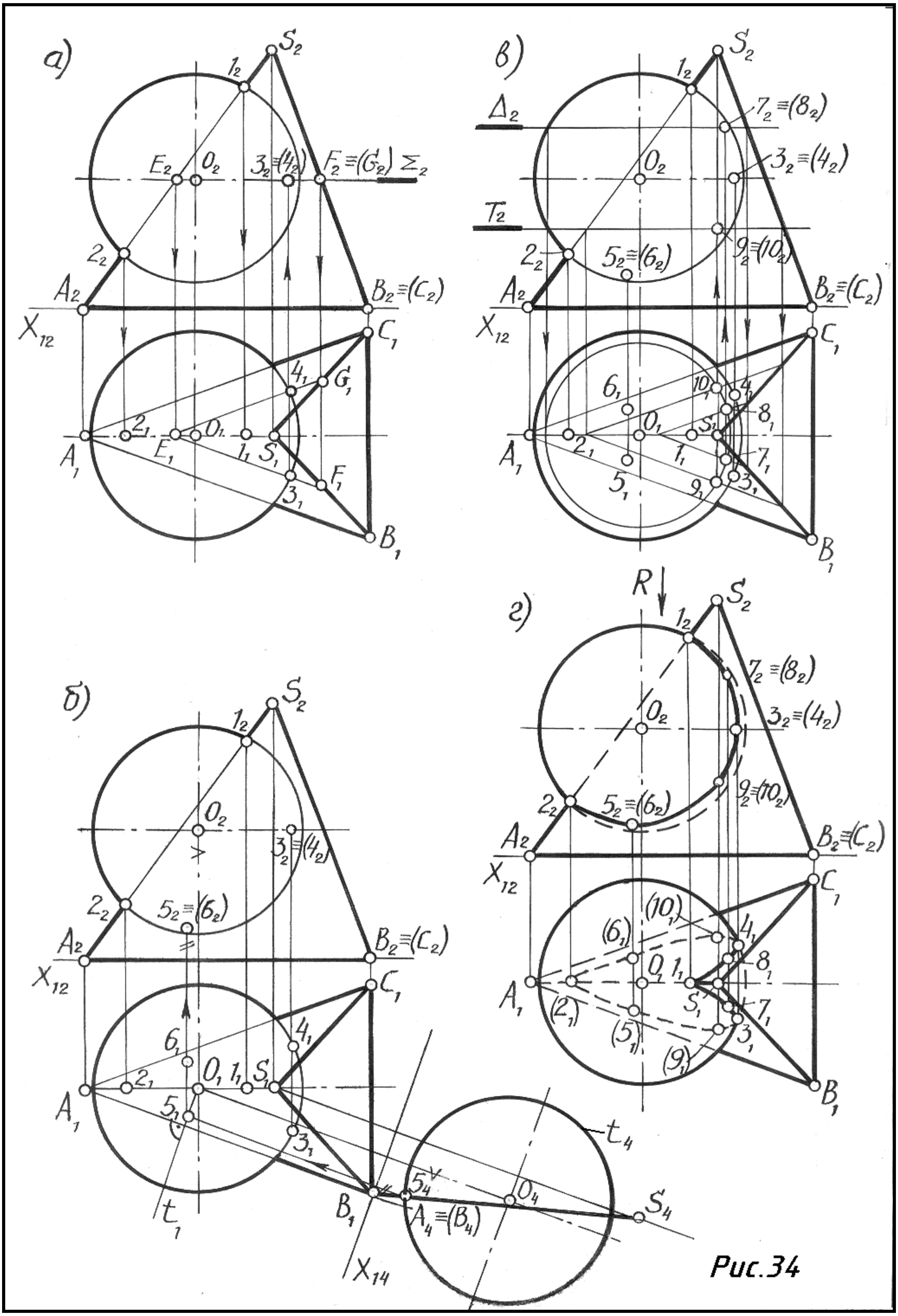

а)
в)
б)
г)
R
Δ2
T2
Σ2
S2
12
22
O2
E2
32≡(42)
F2≡(G2)
A2
B2≡(C2)
C1
X12
A1
21
E1
O1
11
S1
41
G1
31
F1
B1
72≡(82)
92≡(102)
52≡(62)
61
101
81
71
51
91
(101)
(61)
(21)
(51)
(91)
t1
t4
54
O4
S4
A4≡(B4)
X14

Рис.34

Аналогічно визначаємо і будуємо точку 6 (6_1, 6_2).

Рис. 34 в. Для побудови проміжних точок використовуємо допоміжні горизонтальні площини (наприклад Δ), що у перетині зі сферою дають кола, а в перетині з пірамідою – трикутники, подібні до підстави. На рис. 34 в надана побудова проміжних точок 7 і 8. Точки 1_2 і 5_2 визначають межі проведення допоміжних площин.

Рис. 34 г. Частки кіл, по яких грані піраміди перетинають сферу, проекціюються на π_1 і π_2 у частини еліпсів, які на фронтальній проекції проекційно збігаються. На горизонтальній площині проекцій лінія перетину – замкнута крива, ділянка якої 3_1, 7_1, l_1, 8_1, 4_1 видима, тому що лежить на видимій (стосовно спостерігача, що дивиться по напрямку R) частини сфери і видимих граней піраміди.

3.2.1. Перетин конічної поверхні із сферичною

Рис. 35 а. Перетин неповний. Лінія перетину – замкнута просторова плавна крива 4-го порядку.

Обидві поверхні мають загальну площину симетрії Σ, що проходить через вісь обертання конуса і центр сфери, і в який лежать вища і нижча точки лінії перетину. Для побудови цих точок вводимо нову площину проекцій $\pi_4 \| \Sigma$, тоді в системі $\pi_1\pi_4$ знаходимо більш просте розташування поверхонь щодо площин проекцій. Вирішуємо задачу спочатку в цій системі, а потім будуємо проекцію лінії перетину на π_2.

Визначаємо в системі площин $\pi_1\pi_4$ фронтальні проекції вищої і нижчої точок 1_4 та 2_4 стосовно площини π_1, що знаходяться на перетині нарисів поверхонь, і будуємо їхні горизонтальні проекції (1_1 та 2_1).

Фронтальні проекції цих точок знаходимо за допомогою твірної SK, проведеної через них.

Для побудови точок 3 і 4, що лежать на екваторі сфери і є точками перехідної видимості лінії перетину на π_1, вводимо допоміжну горизонтальну площину Ω_4, що проходить через екватор сфери.

Площина Ω розтинає сферу по екватору, а конус по колу радіуса r, перетин горизонтальних проекцій яких визначить точки 3_1 і 4_1. Фронтальні проекції цих точок (3_2 і 4_2) знаходяться на фронтальній проекції екватора сфери.

Рис. 35 б. Будь-яка проміжна точка будується аналогічно. Наприклад, для побудови точок 5_1 і 6_1 проводимо допоміжну площину T_4. Для побудови їхніх фронтальних проекцій використовується або твірна конуса, або паралель сфери.

Рис. 35 в. Далі знаходимо точки 7 і 8, що належать крайній лівій твірній конуса, для чого вводимо допоміжну фронтальну площину Δ, що проходить через цю твірну. Площина Δ перетне сферу по колу радіуса R, фронтальна проекція якого в перетині з фронтальною проекцією твірної дасть точки 7_2 і 8_2. По них знаходимо точки 7_1 і 8_1.

Рис. 35 г. З'єднуємо точки лінії перетину на π_1. У місці перетину горизонтальної проекції лінії перетину з горизонтальною проекцією головного меридіана сфери одержуємо точки 9_1 і 10_1, що є точками перехідної видимості для фронтальної проекції лінії перетину. На фронтальній проекції головного меридіана знаходимо фронтальні проекції цих точок (9_2 і 10_2).

У підсумку одержуємо на горизонтальній площині проекцій частку лінії перетину 3_1, 11_1, 1_1, 7_1, 4_1, видиму спостерігачу, що дивиться по напрямку Р, а на фронтальній площині проекцій буде видимою (для спостерігача, що дивиться по напрямку L) ділянка лінії перетину 9_2, 2_2, 5_2, 10_2.

3.6. ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ СПОСОБУ ДОПОМІЖНИХ СФЕР. ПЕРЕТИН ДВОХ КОНІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Рис. 36 а. Лінія перетину – замкнута просторова плавна крива 4-го порядку, симетрична відносно фронтальної площини.

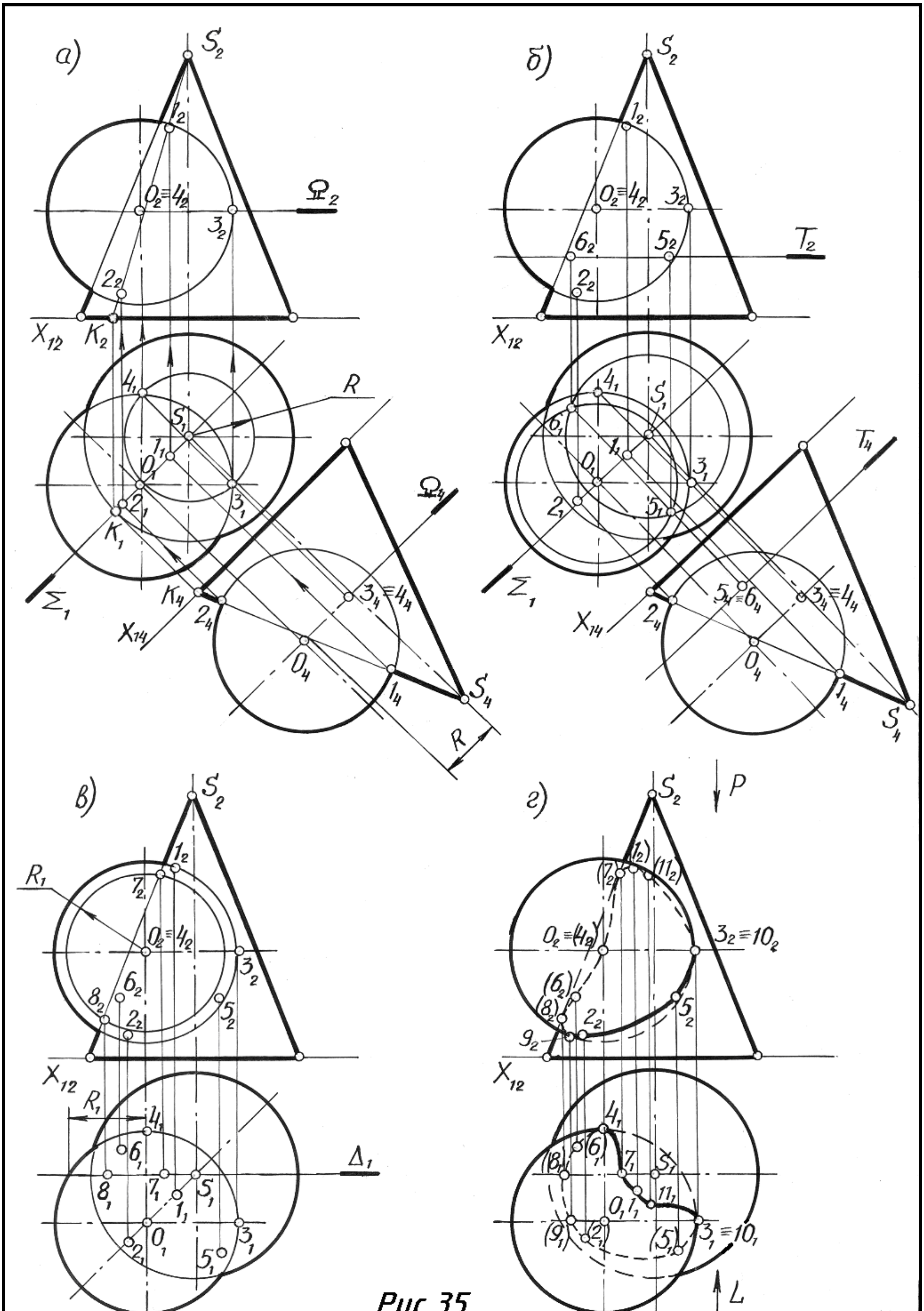


Рис.35

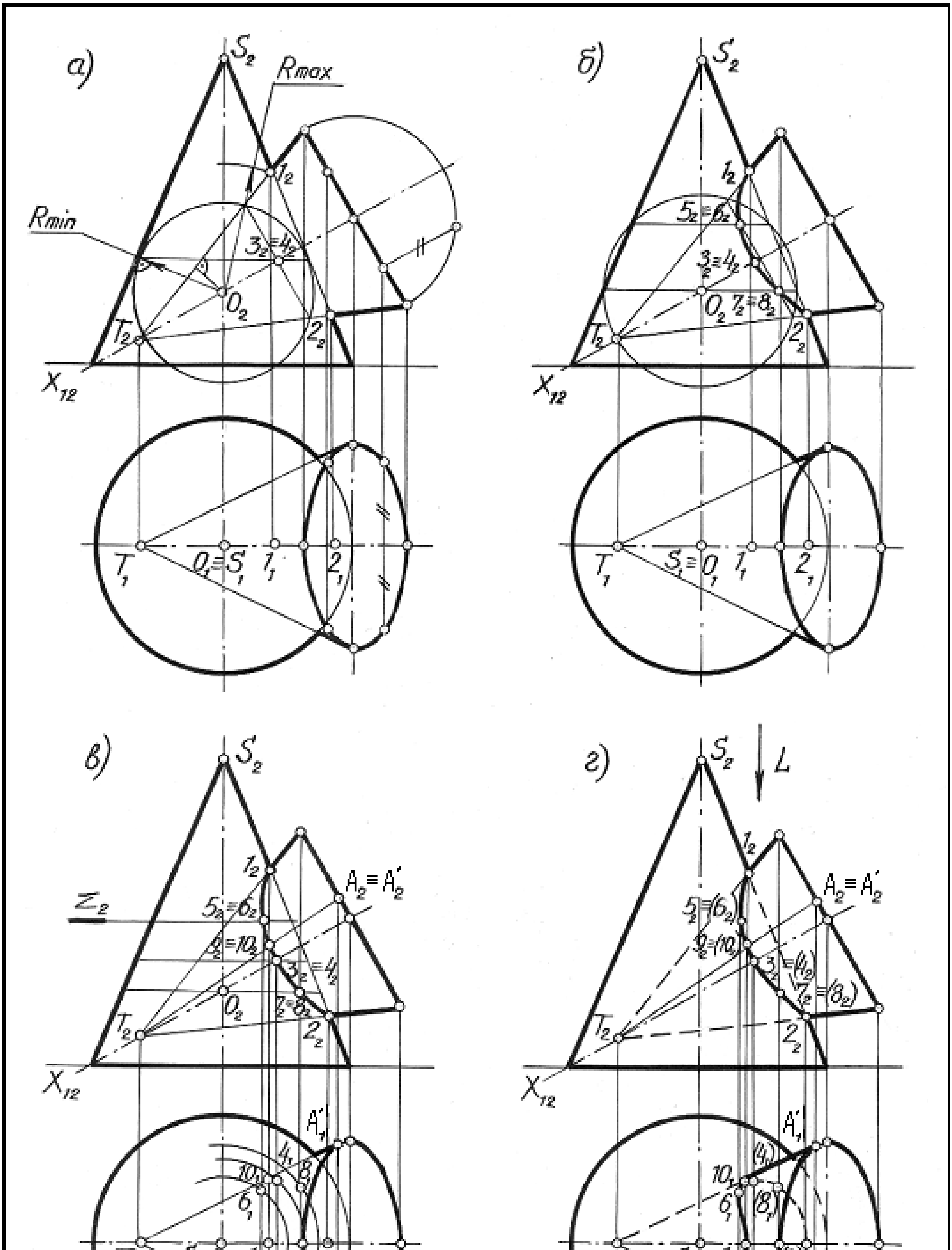


Рис.36

Побудову починаємо з опорних точок : вищої $1(1_2)$ і нижчої $2(2_2)$, що лежать на перетині фронтальних проекцій нарисових твірних обох конусів та визначаються безпосередньо. Добудовуємо горизонтальні проекції цих точок (1_1 і 2_1). Для визначення проміжних точок застосовуємо допоміжні сфери, межі проведення яких визначають R_{max} і R_{min}. Відстань від фронтальної проекції центра сфер O_2 до найбільш віддаленої точки лінії перетину (1_2) визначає радіус максимальної сфери (R_{max}).Радіус мінімальної сфери (R_{min}) дорівнює більшої з двох нормалей, побудованих з центра сфер до фронтальних проекцій нарисових твірних поверхонь.

Кожна допоміжна сфера буде перетинати обидва конуси по колах, що на фронтальну площину проекцій проекціюються у вигляді прямих, перпендикулярних до осей обертання поверхонь конусів. У місці перетину фронтальних проекцій цих кіл одержуємо точки, що належать лінії перетину.

Так, застосування допоміжної сфери радіусом, рівним R_{min}, дасть у місці перетину фронтальних проекцій кіл, по яких обидва конуси перетнуться з цією сферою (вертикального конуса сфера торкається по колу), фронтальні проекції точок 3_2 і 4_2.

Рис. 36 б. Побудуємо на фронтальній площині проекцій проміжні точки $5_2 \equiv 6_2$ і $7_2 \equiv 8_2$, використавши допоміжну сферу радіусом в інтервалі $R_{min} < R < R_{max}$.

Змінюючи радіус допоміжних сфер у цьому інтервалі, можна одержати бажане число точок лінії перетину.

Рис. 36 в. Добудовуємо горизонтальні проекції точок 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1 за належністю до паралелей вертикального конуса, які отримуємо у результаті перетину конуса горизонтальними площинами, проведеними через фронтальні проекції цих точок (див. побудова точок 5_1 і 6_1 за допомогою допоміжної площини Σ_2). Будуємо фронтальну проекцію лінії перетину поверхонь. Визначаємо фронтальні проекції нарисових твірних ТА і ТА' Перетин фронтальних проекцій цих твірних із фронтальною проекцією лінії перетину дає проекції двох точок ($9_2 \equiv 10_2$), що є точками перехідної видимості лінії перетину на горизонтальній проекції.

Рис. 36 г. З'єднуємо точки лінії перетину на горизонтальній площині проекцій згідно їх порядку розташування на фронтальній проекції (1_1, 5_1, 9_1, 3_1, 7_1, 2_1, 8_1, 4_1, 10_1, 6_1, 1_1). Частка лінії перетину на горизонтальній площині проекцій – 9_1, 5_1, 1_1, 6_1, 10_1 – видима, тому що лежить на видимих (для спостерігача, що дивиться по напрямку L) частинах обох конусів. На фронтальній площині проекцій видима і невидима частини лінії перетину проекційно збігаються.

3.7. ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ВЗАЄМНОГО ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ (ПЕРЕТИН ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПОВЕРХНІ З КОНІЧНОЮ)

У загальному випадку лінія перетину поверхонь 2-го порядку – просторова крива 4-го порядку.

В окремих випадках, якщо дві поверхні 2-го порядку описані навколо третьої поверхні 2-го порядку або вписані в неї, то лінія їх перетину поділяється на дві криві другого порядку, площини яких проходять через пряму, що сполучає точки перетину ліній дотику.

Рис. 37 а. Перетин повний. Лінія перетину розпадається на дві плоскі криві 2-го порядку – два еліпси. Позначимо відразу на кресленні фронтальну проекцію лінії перетину, з'єднавши відповідно точки перетину нарисових твірних обох поверхонь, визначивши опорні точки : 1_2, 2_2 – вищі і 3_2, 4_2 – нижчі.

Добудовуємо горизонтальні проекції цих точок, за допомогою ліній проекційного зв’язку, які проводимо з 1_2, 2_2, 3_2, 4_2 до перетину з горизонтальними проекціями твірних, які проекційно співпадають з віссю циліндра.

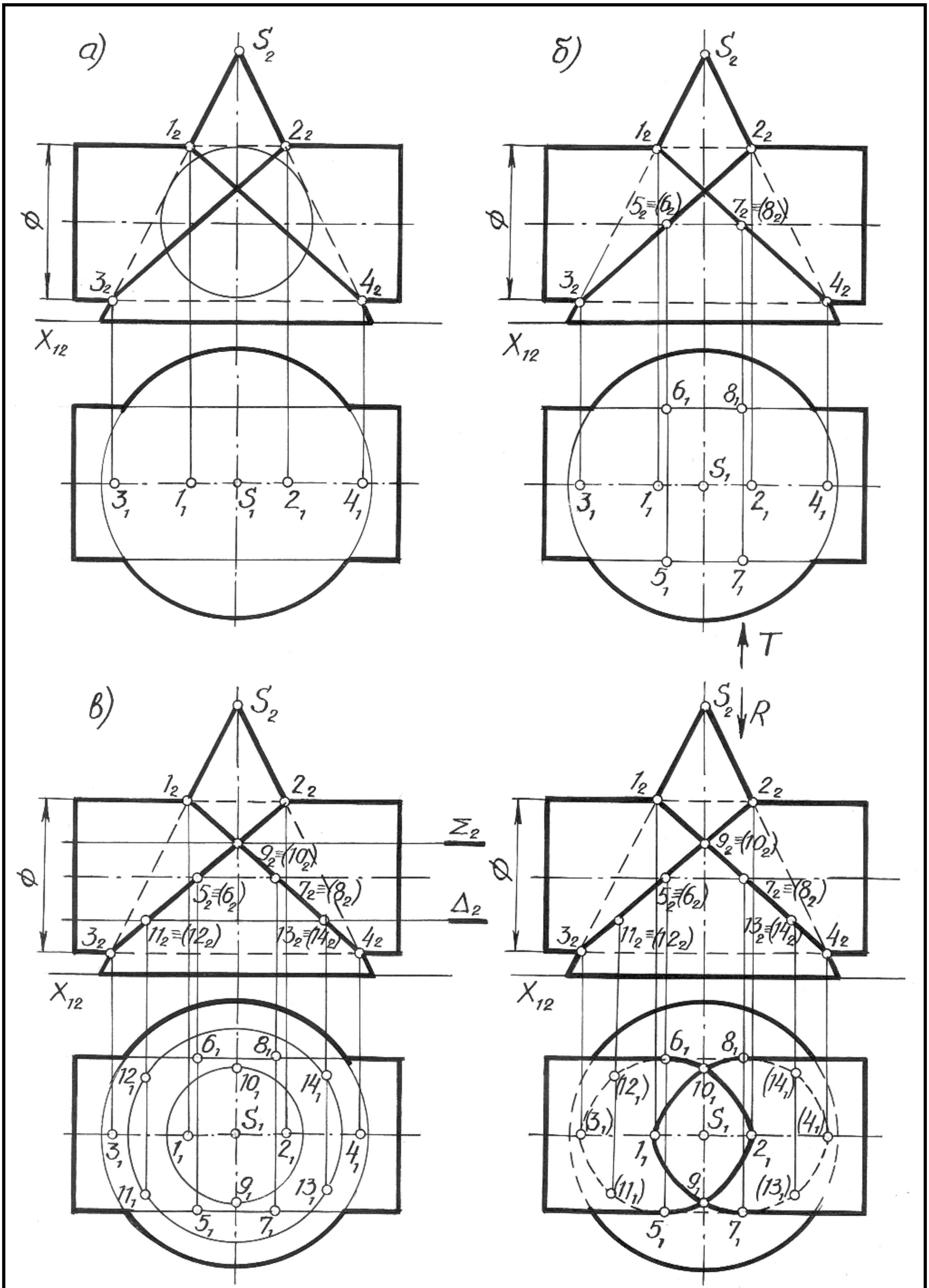

а)
б)
в)
S_2
1_2
2_2
3_2
4_2
X_{12}
ϕ
S_1
1_1
2_1
3_1
4_1
5_1
6_1
7_1
8_1
$5_2 \equiv (6_2)$
$7_2 \equiv (8_2)$
$9_2 \equiv (10_2)$
$11_2 \equiv (12_2)$
$13_2 \equiv (14_2)$
Σ_2
Δ_2
T
R

Рис.37

Рис. 37 б. Позначимо на фронтальній проекції лінії перетину проекції точок $5_2 \equiv 6_2$ і $7_2 \equiv 8_2$, тобто проекції опорних точок: 5_2, 7_2 – найближчих і 6_2, 8_2 – найдальших для спостерігача, що дивиться в напрямку Т. Потім добудовуємо горизонтальні проекції цих точок.

Рис. 37 в. Позначаємо на площині проекцій π_2 проекції точок $9_2 \equiv 10_2$, що є точками дотику конуса і циліндра. Горизонтальні проекції цих точок добудовуємо за допомогою паралелі конуса, яку маємо у результаті перетину його горизонтальною площиною Σ, яка проходить через точки дотику.

Рис. 37 г. Для побудови проміжних точок застосовуємо січні горизонтальні площини, які визначать паралелі конуса та точки лінії перетину, що належать цим паралелям.

Побудова проміжних точок аналогічна побудові точок 9 і 10. Лінія перетину являє собою два еліпса, що торкаються у точках 9 і 10. Частини еліпсів на відрізках 5_1, 9_1, 2_1, 10_1, 6_1 і 7_1, 9_1, 1_1, 10_1, 8_1 видимі на горизонтальній площині проекцій для спостерігача, що дивиться в напрямку R. Інші проекції точок лінії перетину на площині проекцій π_1 – невидимі.

3.8. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка лінія утвориться в перетині двох многогранників? Двох поверхонь другого порядку? Многогранника з тілом обертання?
2. По якому алгоритму вирішують задачі на перетин поверхонь обертання, двох многогранників, многогранника з тілом обертання?
3. Як визначається видимість точок лінії перетину?
4. Які умови необхідні для розв’язування задач способом сфер-посередників?
5. Сформулюйте теорему Монжа.

3.9. ПОБУДОВА РОЗГОРТОК ПОВЕРХОНЬ

В інженерній практиці прийнято розгортки будувати по зовнішній поверхні, що необхідно враховувати при їхньому виконанні. Контури розгорток обводяться суцільною лінією товщиною S. Усі точки на розгортках мають нульовий індекс.

3.9.1. Розгортка поверхні піраміди

Повна розгортка піраміди складається з розгортки бічної поверхні і основи (рис.38).

Задача зводиться до визначення натуральної величини ребер піраміди,яка може бути знайдена способом прямокутного трикутника (рис. 38 а) чи способом обертання (рис. 38 б).

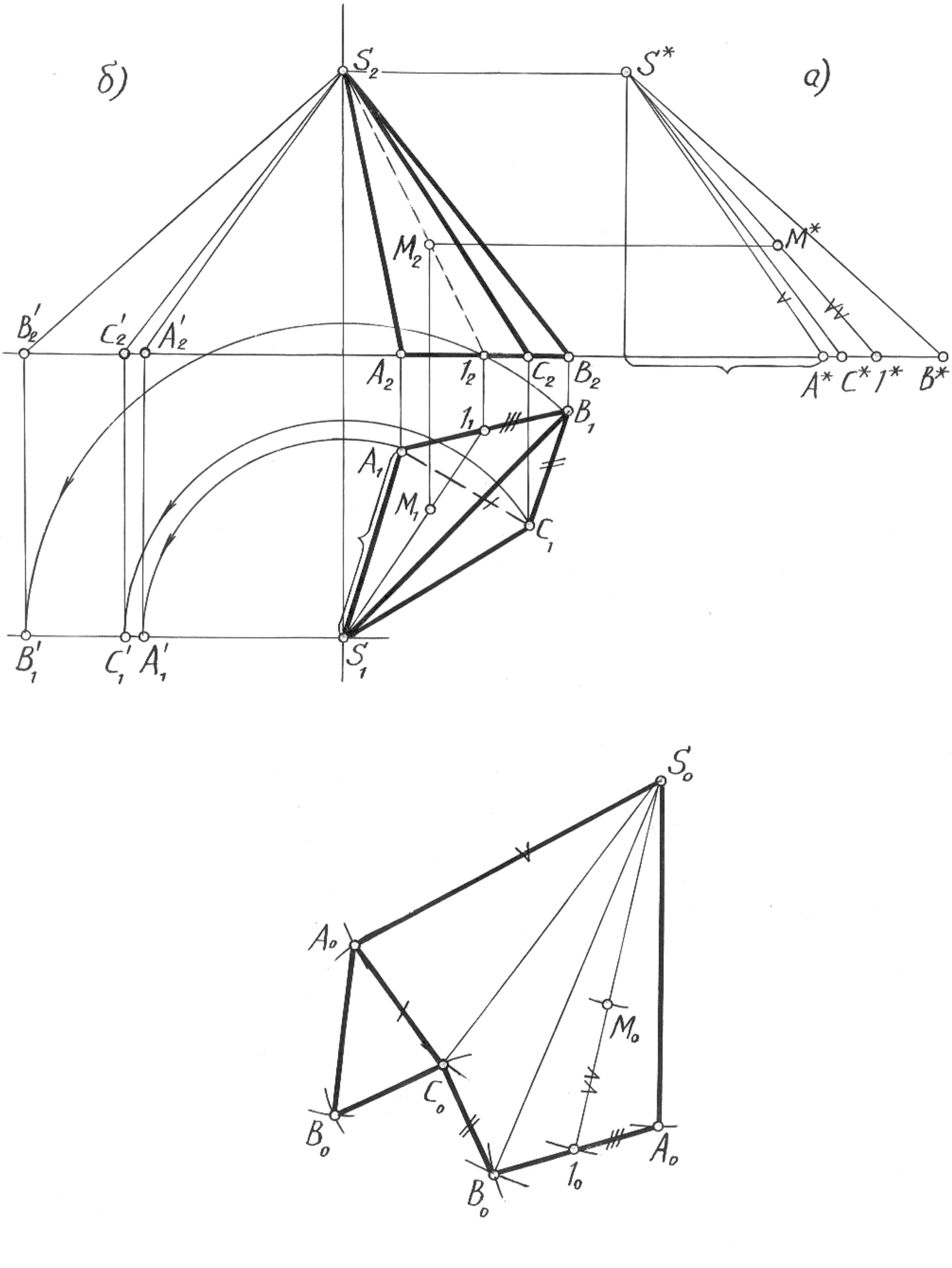
Основа піраміди лежить у площині π_1, тому на π_1 вона проекціюється без спотворення. Розгортка бічної поверхні піраміди складається з трьох примикаючих один до одного трикутників, кожен з яких побудовано по трьом сторонам.

Для нанесення на розгортку довільної точки M, що лежить на поверхні піраміди, треба провести через точку пряму S -1 ($S_2 1_2$, $S_1 1_1$). Побудувавши пряму $S_0 1_0$ на розгортці, знаходимо на ній точку M_0.

3.9.2. Розгортка конічної поверхні

Прямий круговий конус (рис. 39)

Розгортка бічної поверхні конуса може бути побудована двома способами: по центральному куту і способом апроксимації (тріангуляції). При розгортанні бічної поверхні конуса першим способом виходить сектор кола, радіус якого дорівнює твірної конуса, а довжина дуги дорівнює довжині кола основи. Центральний кут α визначається по формулі $\alpha \approx 180^\circ \cdot \frac{d}{l}$, де *d* – діаметр кола основи ; ℓ – довжина твірної.



б)
а)
S_2
S^*
M_2
M^*
B_2'
C_2'
A_2'
A_2
1_2
C_2
B_2
A^*
C^*
1^*
B^*
1_1
B_1
A_1
M_1
C_1
B_1'
C_1'
A_1'
S_1
S_0
A_0
M_0
C_0
B_0
1_0

Рис.38

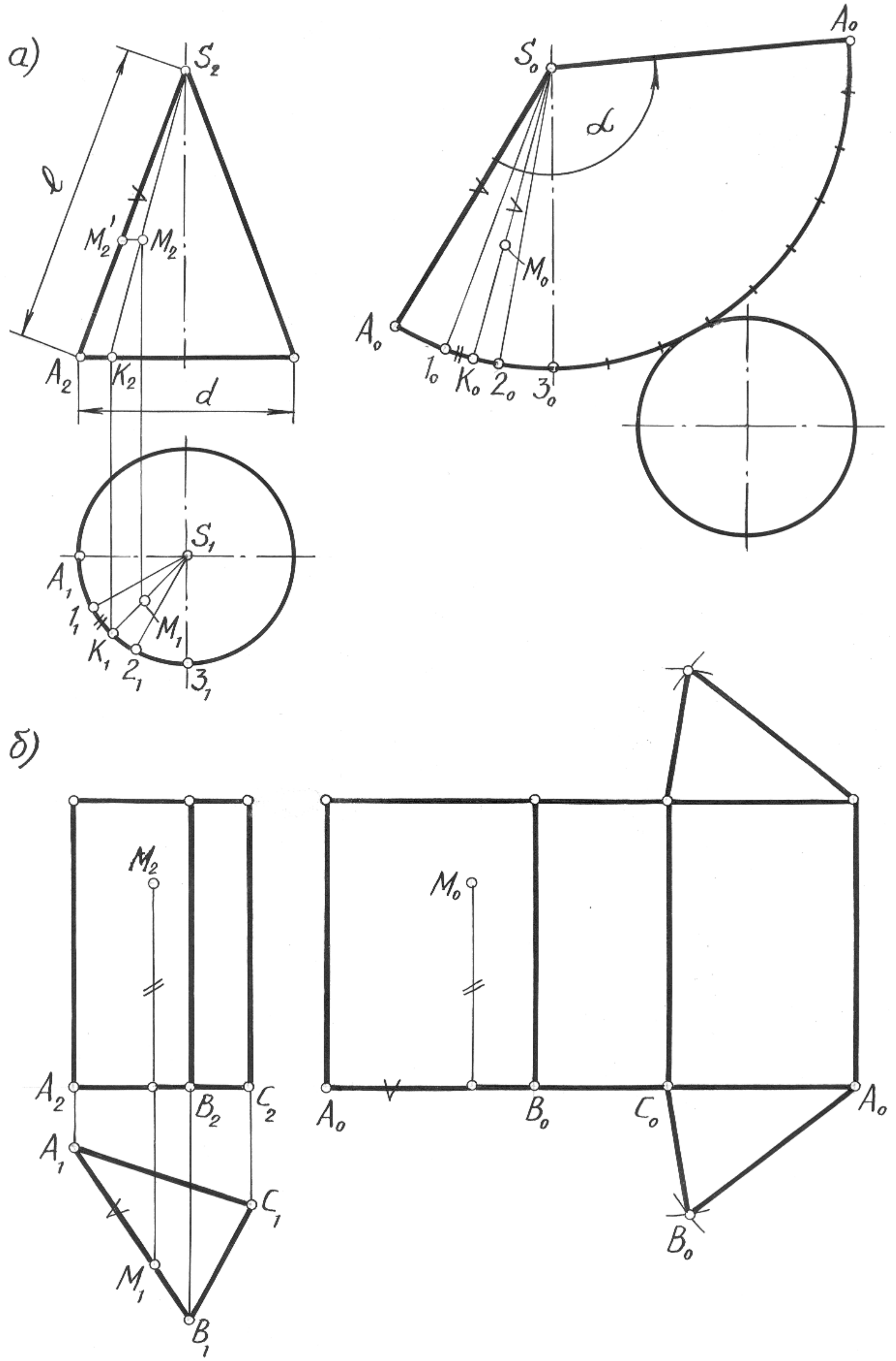

а)
S_2
l
M_2'
M_2
A_2
K_2
d
S_1
A_1
1_1
K_1
M_1
2_1
3_1
S_0
A_0
α
M_0
A_0
1_0
K_0
2_0
3_0
б)
M_2
A_2
B_2
C_2
A_1
C_1
M_1
B_1
M_0
A_0
B_0
C_0
A_0
B_0

Рис.39

При побудові розгортки іншим способом основу конуса поділяють на *n* рівних частин (на рис. 40 *n* =12), дуги замінюють стягуючими їх хордами і далі побудову ведуть як для *n*-гранної піраміди. Щоб побудувати на розгортці будь-яку точку М, яка належить поверхні конуса, проводимо через цю точку твірну SK (S_1K_1, S_2K_2), будуємо на розгорненні S_0K_0. Далі знаходимо натуральну величину частини твірної SM S_2M_2' та відкладаємо на розгорненні S_0K_0 від точки S_0.

Еліптичний конус (рис. 40)

Розгортка еліптичного конуса виконується способом тріангуляції, тобто поверхню конуса апроксимують *n*-гранной пірамідою. При цьому розгортка бічної поверхні виглядає як трикутники, що примикають один до одного, із спільною вершиною.

У даному прикладі основа конуса розділена на 12 рівних частин. Визначивши способом прямокутного трикутника чи способом обертання натуральні величини твірних, що проходять через точки розподілу основи, будуємо розгортку бічної поверхні конуса. Кожен трикутник будується по трьох сторонах, дві з який дорівнюють натуральним величинам твірних, а третя – хорді, що стягує дугу кола основи між сусідніми точками розподілу. Через отримані точки 1_0, 2_0, 3_0, ... по лекалу проводимо плавну криву.

Для побудови на розгортці довільної точки М, що належить поверхні конуса, проводимо через цю точку твірну SK. Будуємо натуральну величину твірної ($S_2K'_2$) і на ній точку M'_2 (побудова зрозуміла з кресленика). Далі на розгортці будуємо пряму S_0K_0 і на ній відкладаємо відстань $S_0M_0=S_2M'_2$. Щоб одержати повну розгорку поверхні конуса, треба до бічної поверхні добудувати основу конуса.

3.9.3. Розгортка призматичної поверхні

Розгортка прямої призми дуже проста і ясна з кресленика (рис. 39 б).

Розгортка похилої призми може бути виконана двома способами: «нормального перерізу» і способом «розгортання». Розгортка поверхні призми являє собою плоску фігуру, яку одержали послідовним суміщенням усіх граней многогранника з площиною креслення. При цьому усі грані на розгортці повинні зображуватися в натуральну величину, тому побудова розгортки зводиться до визначення натуральної величини окремих граней поверхні.

Спосіб «нормального перерізу» (рис. 41)

Під нормальним перерізом розуміють перетин призми площиною, перпендикулярної до її ребер. Якщо ребра призми розташовані паралельно до однієї з площин проекцій, то площину нормального перетину можна проводити відразу (перпендикулярно натуральній величині ребер).

У випадку довільного розташування призми стосовно площин проекцій необхідно попередньо зробити перетворення комплексного кресленика так, щоб ребра призми стали прямими рівня. На рис. 41 ребра призми на площину π_4 проекціюються в натуральну величину, тому в будь-якому місці проводимо площину Σ_4, перпендикулярну до ребер (одержуємо нормальний перетин-трикутник $1_4 2_4 3_4$).

Далі, замінивши π_1 на π_5 (вісь $X_{45} \parallel \Sigma_4$) і побудувавши проекцію нормального перетину на π_1 (трикутник $1_1 2_1 3_1$), одержуємо його натуральну величину (трикутник $1_5 2_5 3_5$).

У будь-якому місці кресленика проводимо так звану будівельну лінію, на якій послідовно відкладаємо сторони нормального перетину, починаючи з будь-якої точки. Послідовність точок повинна бути такою, щоб розгортка була виконана по зовнішній поверхні. Відрізок 3_0-3_0 можна вважати "розгорткою" нормального перетину – трикутника $1_5 2_5 3_5$.

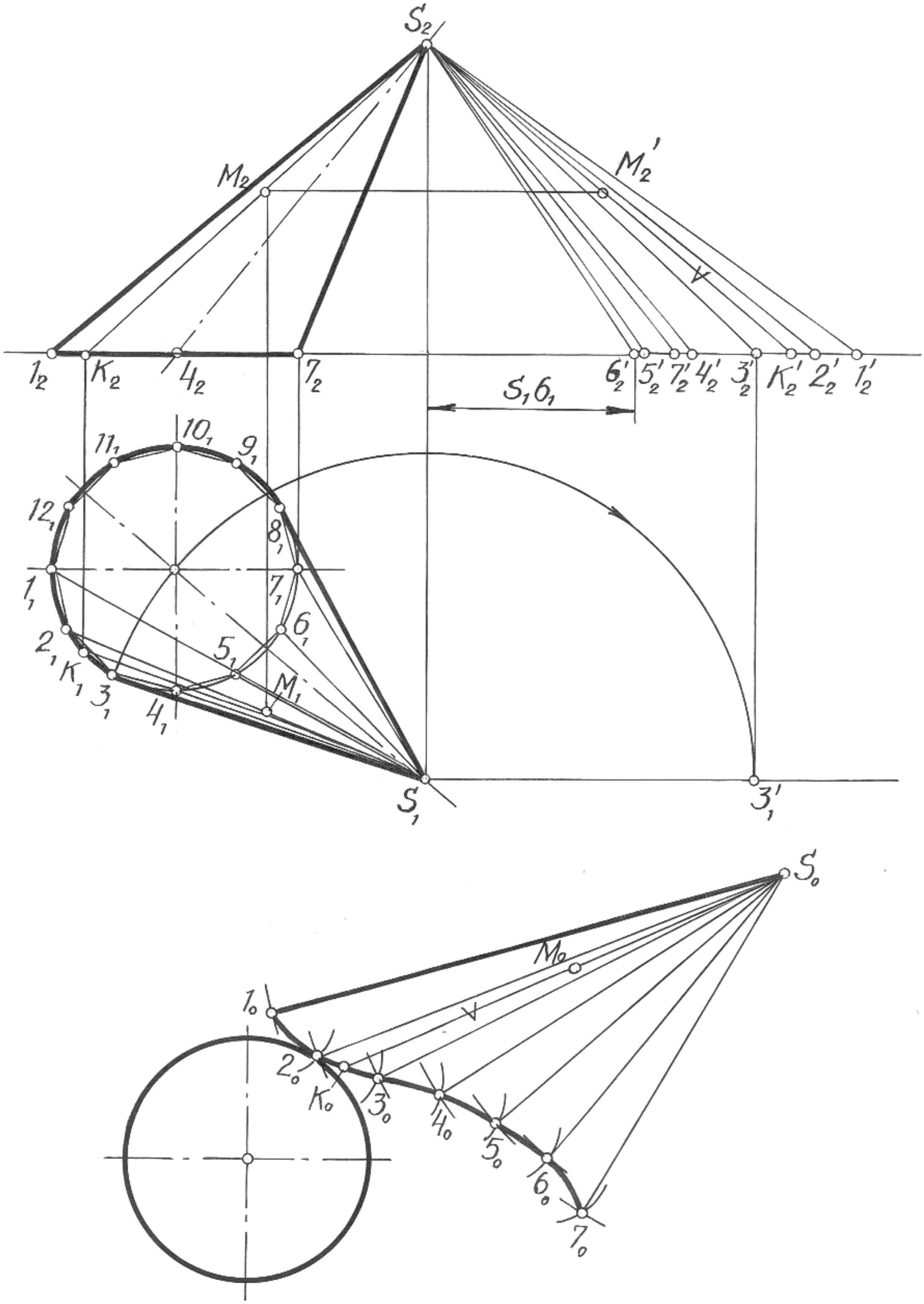

S2
M2
M2'
12
K2
42
72
6'2
5'2
7'2
4'2
3'2
K'2
2'2
1'2
S1 61
111
101
91
121
81
11
71
61
21
K1
31
41
51
M1
S1
3'1
S0
M0
10
20
K0
30
40
50
60
70

Рис. 40

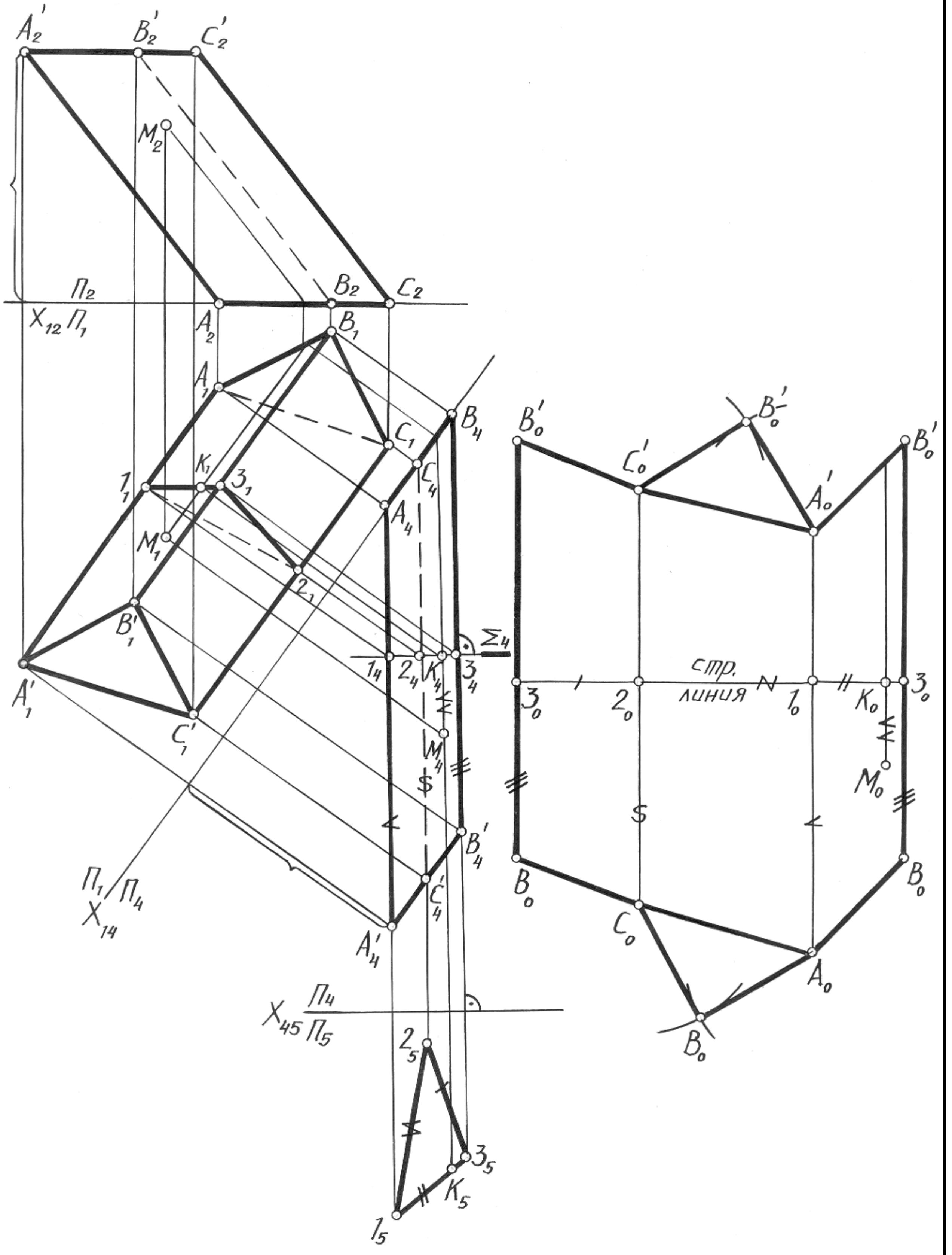


Рис. 41

Бічні ребра призми паралельні між собою, сторони нормального перетину їм перпендикулярні, тому з властивості збереження кутів на розгорненні випливає, що бічні ребра паралельні між собою і перпендикулярні до периметра нормального перетину. В точках 3_0, 2_0, 1_0 і 3_0, перпендикулярно до 3_0-3_0, по обидва боки будівельної лінії відкладаємо відрізки бічних ребер, беручи їх з π_4 (побудова зрозуміла з кресленика). Кінці ребер з'єднуємо прямими і одержуємо розгортку бічної поверхні призми.

Приєднавши до розгортки бічної поверхні призми обидві основи, одержуємо повну розгортку призми. Для побудови на розгортці будь-якої точки M, що належить поверхні призми, потрібно через цю точку провести пряму, паралельну до ребер призми. Ця пряма перетне відрізок (1-3) в точці K. Побудувавши точку K на проекціях нормального перетину і відклавши на будівельній лінії від точки 1_0 відрізок рівний 1_5K_5, одержуємо точку K_0 на розгортці. Далі знаходимо точку M_0, побудова якої зрозуміла з кресленника.

Спосіб «розкочування» (рис. 42).

Для побудови розгортки цим способом також, як і в попередньому способі, необхідно спочатку перетворити комплексний кресленик так, щоб ребра призми стали лініями рівня, тобто спроекціювалися в справжню величину. Потім послідовно сполучаємо грані призми з площиною кресленика, обертаючи призму навколо кожного з бічних ребер. При цьому кінці ребер переміщуються в площинах, перпендикулярних до ребер. Сліди цих площин являють собою прямі, перпендикулярні до $B_4B'_4$. На цих прямих у визначеній послідовності радіусами, рівними сторонам основи (на π_1 основа проекціюється в справжню величину), робимо насічки на відповідних напрямках. Наприклад, будуємо грань $B_0C_0C'_0B'_0$. Для цього з точки $B_0(B'_0)$ радіусом, рівним B_1C_1, робимо насічку на прямій, проведеній з точки $C_4(C'_4)$, одержуємо точку $C_0(C'_0)$. Для побудови грані $C_0A_0C'_0A'_0$ дугою радіуса C_1A_1 робимо насічку на прямій, проведеній з точки $A_4(A'_4)$ і т.д. З отриманих точок C_0, A_0, B_0 проводимо прямі, паралельні до ребер, і на них відкладаємо натуральні величини ребер. З'єднавши всі побудовані точки, одержуємо розгортку бічної поверхні призми, а потім до неї додаємо обидві основи. Побудова на розгортці точки M, що належить поверхні призми, зрозуміла з кресленика.

3.9.4. Розгортка циліндричної поверхні

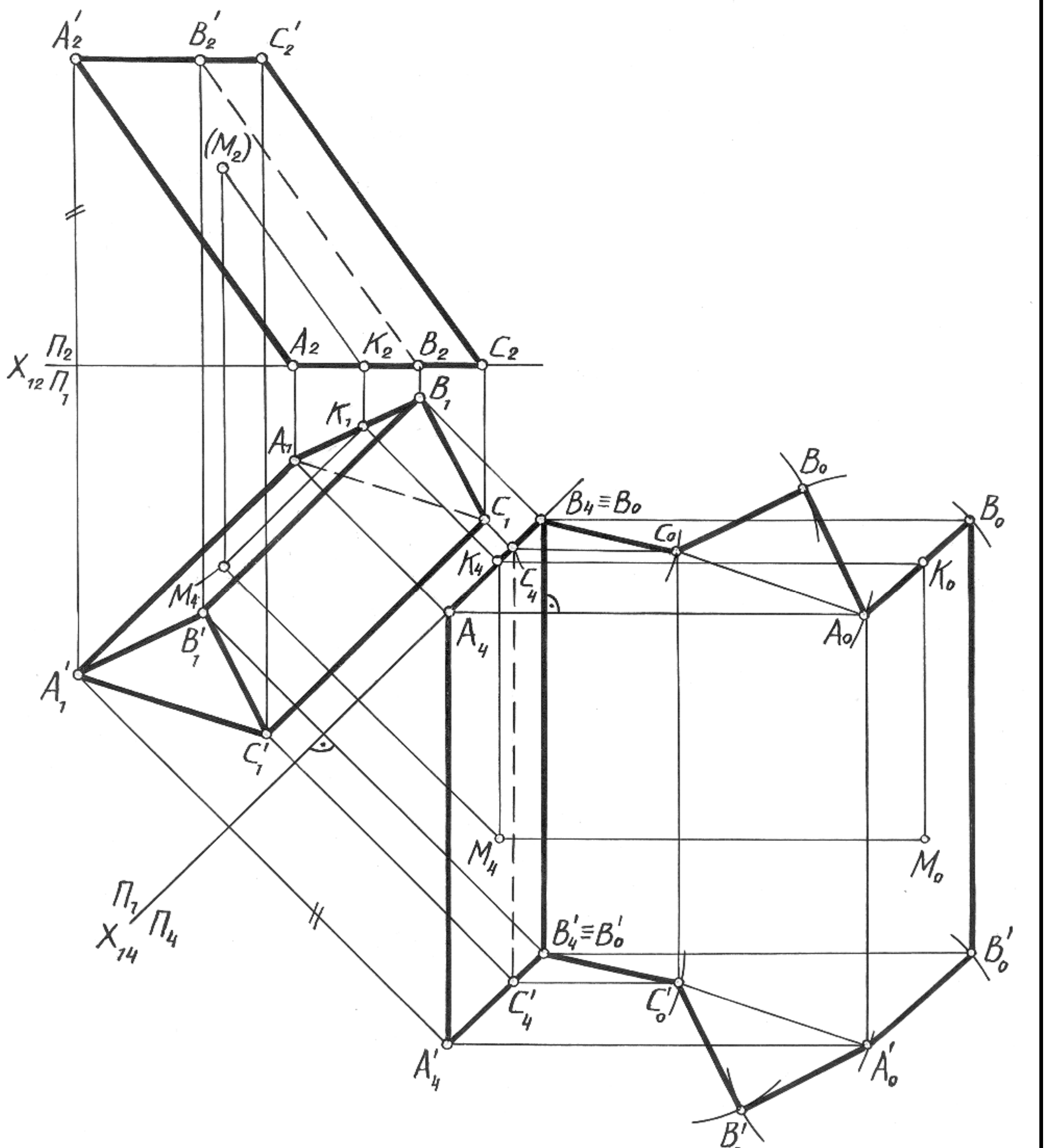
Прямий круговий циліндр (рис. 43)

Розгортка бічної поверхні циліндра являє собою прямокутник, довжина якого дорівнює довжині кола основи, а ширина – довжині твірної циліндра. Але практично частіше будують наближену розгортку, для чого основу поділяють на ***n*** рівних частин і хорди послідовно відкладають на горизонтальній прямій. Провівши в цих точках перпендикуляри до лінії основи, одержимо на розгортці твірні циліндра.

Таким способом можна побудувати будь-яку точку на розгортці (див. на кресленику побудову точки M). До розгортки бічної поверхні в будь-яких точках добудовуємо обидві основи.

Похилий циліндр (рис. 43). Для побудови розгортки похилого циліндра його апроксимують *n*-гранною призмою, а потім розгортку виконують одним з двох способів, що застосовують для похилої призми. У даному прикладі циліндр розташований фронтально, тому на π_2 твірні проекціюються без спотворення. Розгортку виконуємо способом «розгортання». Впишемо в циліндр 12-ти гранну призму. Кінці твірних при розгортанні переміщуються в площинах, перпендикулярних до твірних. Положення сполучених кінців твірних при цьому визначається насічками розміром хорд між двома суміжними твірними. У такий спосіб одержуємо ряд точок 1_0, 2_0, 3_0 і т.д., що визначать межу бічної розгортки вздовж нижньої основи. Також будують межу розгортки вздовж верхньої основи. Прибудувавши до бічної поверхні дві основи, одержуємо повну розгортку поверхні циліндра.

Будь-яка точка, що лежить на поверхні циліндра, будується на розгортці за допомогою твірної, проведеної через неї (див. побудова точки M на кресленні, рис. 43).



A_2'
B_2'
C_2'
(M_2)
A_2
K_2
B_2
C_2
X_{12}
Π_2
Π_1
B_1
K_1
A_1
C_1
$B_4 \equiv B_0$
C_0
B_0
B_0
K_4
C_4
K_0
M_4
A_4
A_0
B_1'
A_1'
C_1'
M_4
M_0
Π_1
Π_4
X_{14}
$B_4' \equiv B_0'$
B_0'
C_4'
C_0'
A_4'
A_0'
B_0'

Рис. 42

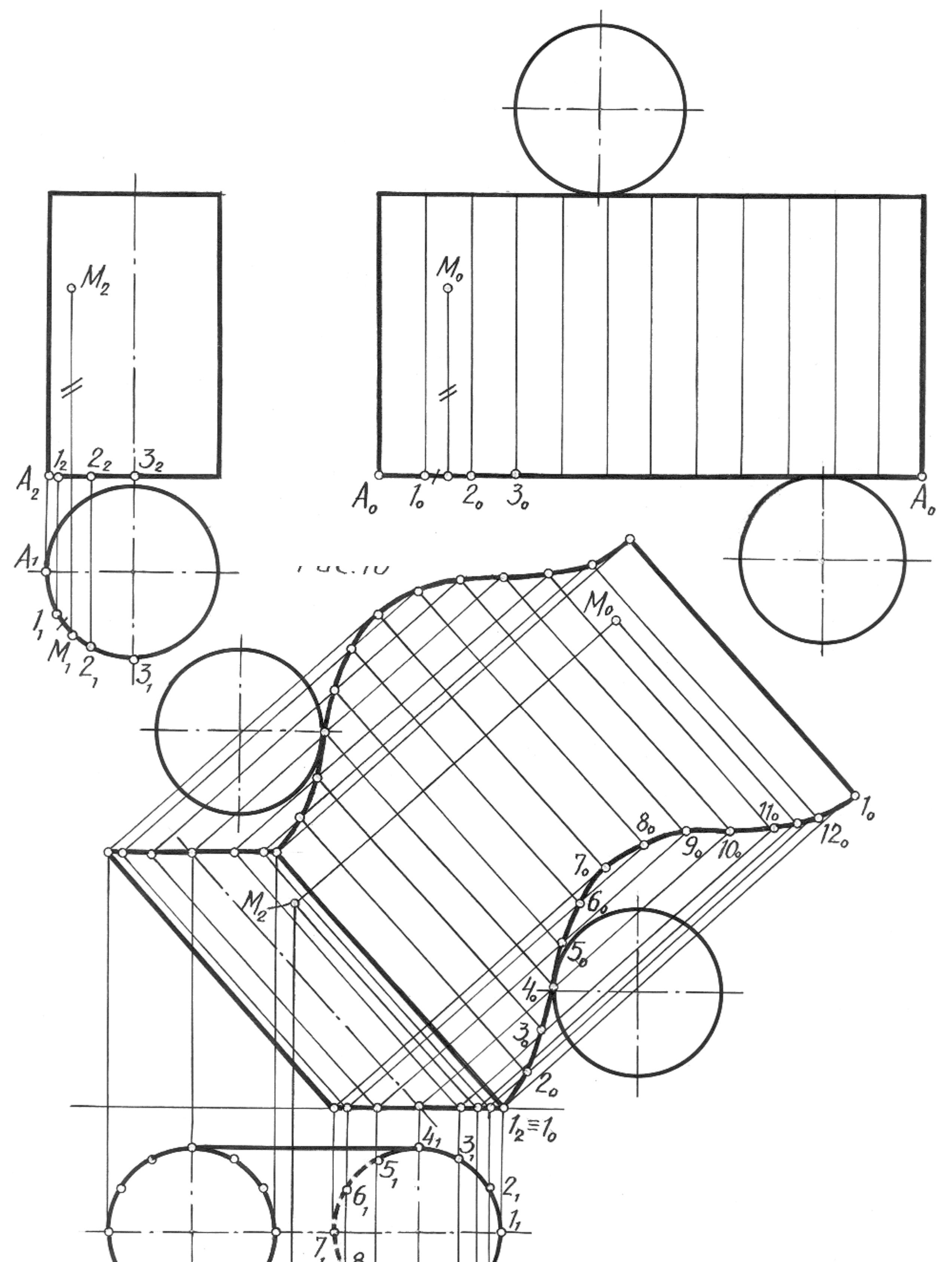

M2
Mo
A2
12
22
32
A1
11
M1
21
31
Ao
1o
2o
3o
M0
1o
8o
9o
10o
11o
12o
7o
6o
5o
4o
3o
2o
M2
12≡1o
41
31
51
21
61
11
71
81
121
M1
91
111
101

Рис. 43

3.9.5. Розгортка сферичної поверхні

Існує кілька способів побудови розгортки сфери. Ми розглянемо один з них – спосіб допоміжних циліндрів, суть якого полягає в наступному : сферу розбивають за допомогою меридіанів на кілька рівних частин (пелюстків). На рис. 44 для наочності сфера розділена на 8 частин, хоча звичайно її поділяють на 12 чи 16 частин. Кожну частину замінюють циліндричною поверхнею, що є дотичною до сфери в точках середнього меридіана пелюстка, з віссю, що проходить через центр сфери.

Межами для твірних циліндричної поверхні служать площини меридіанів, що обмежують пелюсток. Розглянемо пелюсток, середнім меридіаном якого є головний меридіан 03. Вісь циліндричної поверхні і її твірні розташовані перпендикулярно до фронтальної площини проекцій. Довжини твірних легко знайти на горизонтальній проекції як відрізки в межах кута $A_1O_1B_1$. Тепер будуємо розгортку цієї циліндричної поверхні. Для неї уже відом нормальний (до твірної) переріз, що є меридіаном 03. Для побудови розгортки застосовуємо спосіб нормального перерізу.

На головному меридіані намічаємо ряд точок (для наочності поділяємо половину меридіана на 6 рівних частин) 1 (1_1, 1_2), 2 (2_1, 2_2), 3 (3_1, 3_2) і проводимо через них відрізки твірних EF (E_1F_1), CD (C_1D_1), AB (A_1B_1).

Потім на горизонтальній прямій беремо довільно точку 3_0, проводимо через неї перпендикуляр, на якому спрямляємо меридіан у пряму 0_03_0 (відкладаємо відрізок,що відповідно дорівнює дузі 0_23_2, тобто $2\pi R/4$).

На прямій 0_03_0 намічаємо точки 1_0,2_0, на яких перпендикулярно до 0_03_0 будуємо твірні (E_0F_0=E_1F_1 ; C_0D_0=C_1D_1 ; A_0B_0=A_1B_1). Отримані точки з'єднуємо лекальною кривою, у результаті чого виходить умовна розгортка одного пелюстка. Повна розгортка складається з 8 таких пелюстків (на рис. 44 їх зображено тільки 4).

Щоб нанести на розгортку точку М, що належить поверхні сфери, треба попередньо повернути її до сполучення з головним меридіаном 03. Потім виміряти на π_2 відстань від повернутого положення точки М до найближчого розподілу меридіана і виміряти на π_1 відстань від точки М до проекції середнього меридіана пелюстка, на якому знаходиться точка М. За допомогою цих двох відстаней будуємо на розгортці відповідного пелюстка точку M_0.

3.9.6. Розгортка поверхні тора

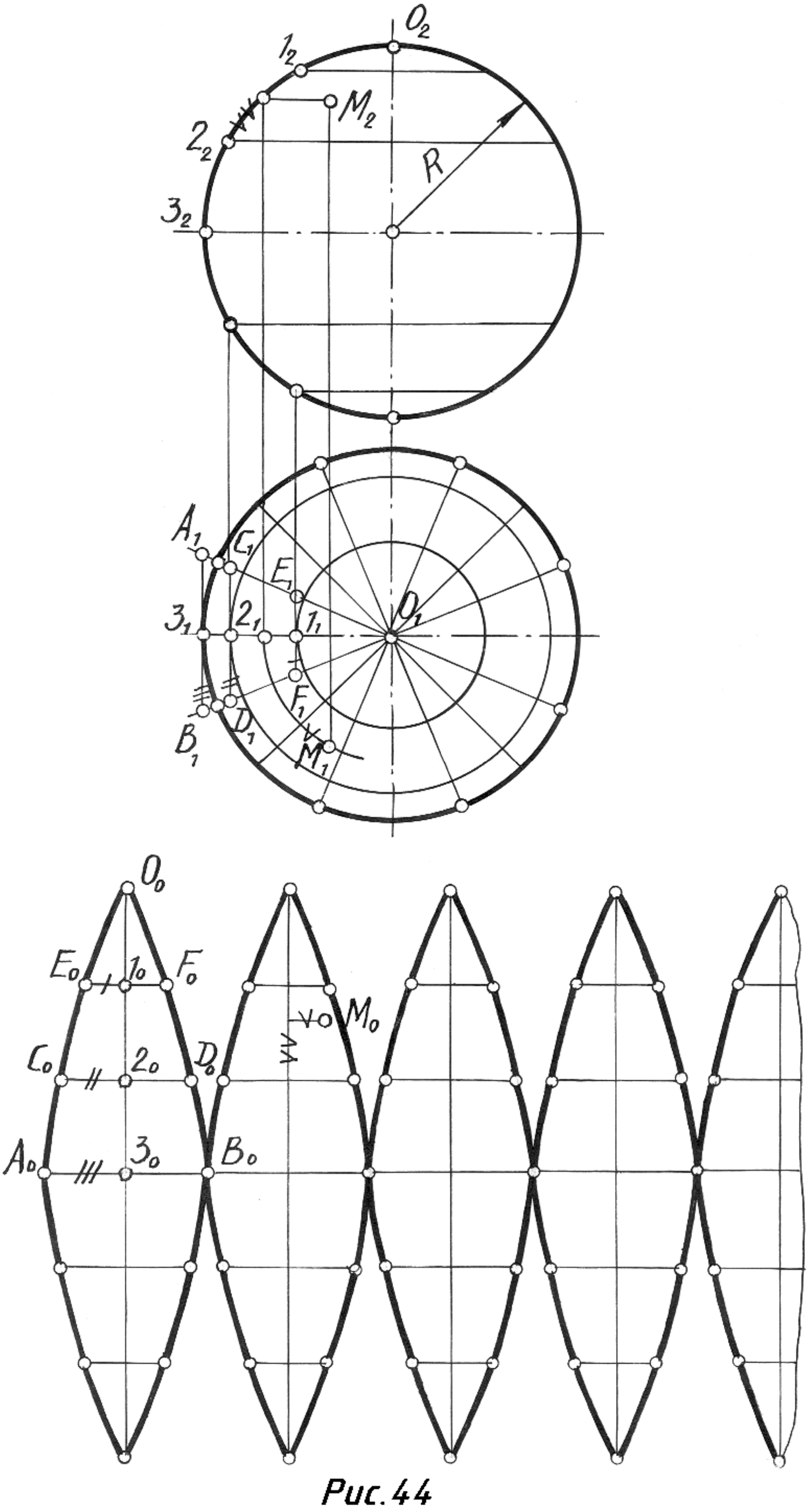
Тор є поверхнею, що не розгортається, тому мова може йти про умовну розгортку, яка може бути виконана декількома способами. Зупинимося на одному з них. На рис. 45 зображена фронтальна проекція 1/4 тора; на розгортці надана поверхня однієї третини цієї частини.

Пряма 0_2A_2 є віссю симетрії розглянутої частини. Провівши через неї площину Σ, що є фронтально-проекціюючою, одержуємо в перетині коло –нормальний переріз, розгортка якого у виді прямої D_0D_0 приймається за середню лінію фігури розгортки розглянутої ділянки тора. Нормальний переріз поділяємо на 12 рівних частин. Відповідно розподілам 1, 2,...12 на цьому перерізі проводимо з точки O_2 концентричні дуги.

Побудова розгортки виконується для I і II частин окремо. Для першої частини відкладаємо відрізок D_0D_0, рівний по довжині половині довжини кола нормального перерізу, і поділяємо його на 6 частин, одержуємо точки A_0, B_0,

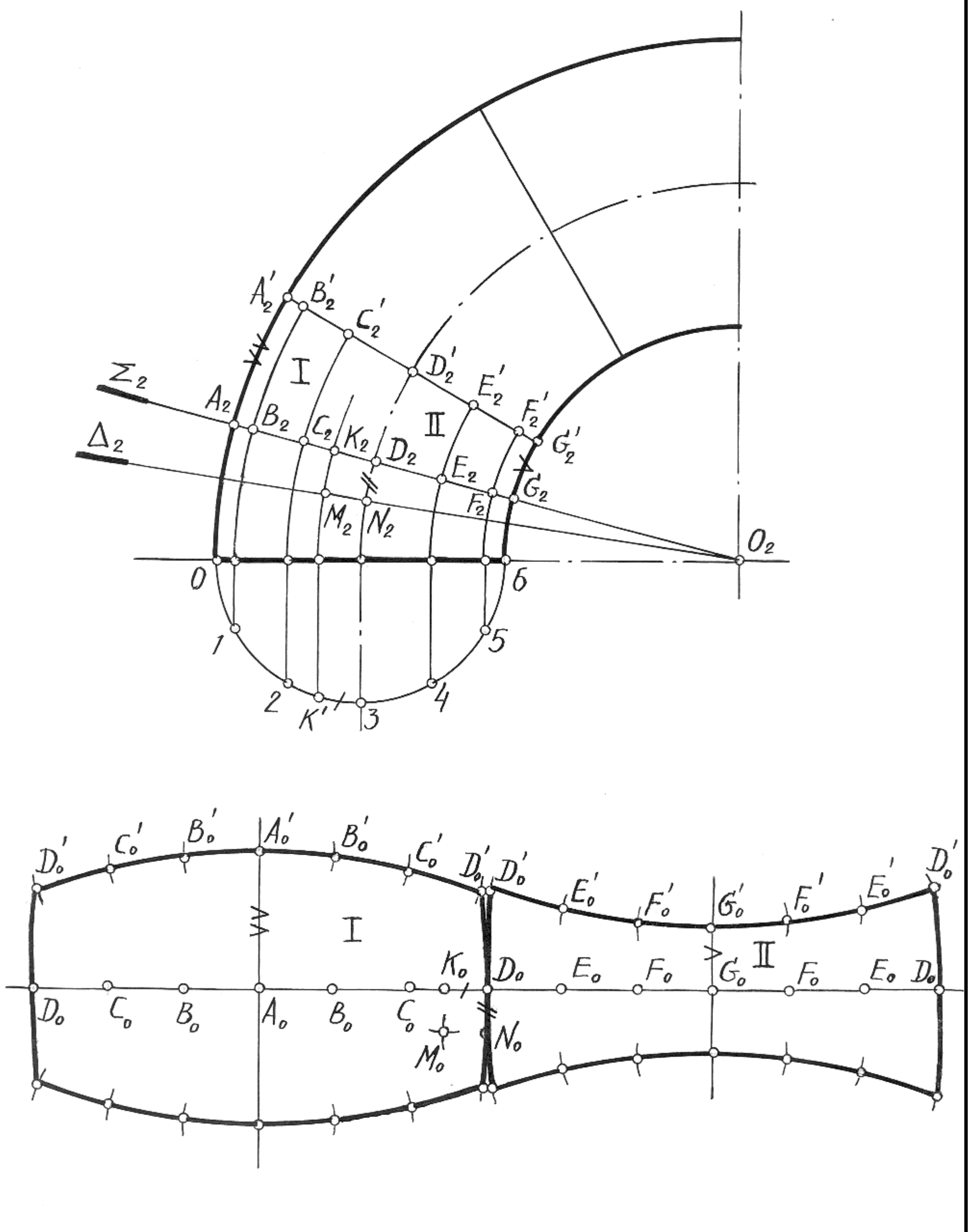
C_0. У точці A_0 проводимо перпендикуляр до D_0D_0 і відкладаємо на ньому в обидва боки від точки A_0 відрізок $A_0A'_0$, що дорівнює довжині дуги $A_2A'_2$. Для визначення точки B'_0 на розгортці проводимо з точки B_0 дугу радіусом, рівним довжині дуги $B_2B'_2$, а з точки A'_0 дугу радіусом, рівним відрізку 01. У такий само спосіб будуємо точки C'_0, і D'_0.

Аналогічно будуємо розгортку поверхні другої частини. При побудові розгортки варто враховувати, що I і II частини повинні примикати одна до одної.



O_2
1_2
M_2
2_2
3_2
R
A_1
C_1
E_1
3_1
2_1
1_1
O_1
F_1
B_1
D_1
M_1
O_0
E_0
1_0
F_0
M_0
C_0
2_0
D_0
A_0
3_0
B_0

Рис. 44



A'2 B'2 C'2 D'2 E'2 F'2 G'2
Σ2
Δ2
A2 B2 C2 K2 D2 E2 F2 G2
I
II
M2 N2
O2
0
1
2
K'
3
4
5
6
D'o C'o B'o A'o B'o C'o D'o D'o E'o F'o G'o F'o E'o D'o
Ko
Do Co Bo Ao Bo Co Do Eo Fo Go Fo Eo Do
Mo No

Рис.45

Для побудови на розгортці довільної точки M, що належить до тора, проводимо через неї допоміжну площину Δ, що перетне дугу D_2-3 у точці N_2, і дугу радіусом O_2M_2, що відстоїть від дуги 3 на відстані K′-3 (по колу).

Визначаємо точки N_0 і K_0 на розгортці (побудова яких зрозуміла з креслення), приймаємо їх за центри дуг з радіусами M_2K_2 і K′-3, перетин яких визначить на розгортці положення точки M_0.

3.10. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається розгорткою поверхні?
2. Які поверхні відносяться до поверхонь, що розгортаються?
3. Чи можна побудувати розгортку поверхні, що не розгортається?
4. Яким способом будують розгортку пірамідальних (конічних) поверхонь? У чому його сутність?
5. Яку форму має розгортка поверхні прямого кругового конуса?
6. Яким способом будують розгортку призматичних (циліндричних) поверхонь?
7. Що являє собою розгортка поверхні прямого кругового циліндра?
8. Як нанести на розгортку поверхні точку, що їй належить?

3.11. ПОБУДОВА АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЙ

3.11.1. Загальні відомості

Аксонометрична проекція (чи аксонометрія) являє собою один з методів побудови наочних зображень на одній площині.

Одна аксонометрична проекція не цілком визначає положення геометричного елемента в просторі (тобто не має властивість оборотності). Щоб аксонометричний кресленик став оборотним, необхідно крім аксонометричної проекції геометричного елемента задати хоча б одну його вторинну проекцію. Наприклад, на рис. 46 положення прямої AB у просторі невизначене, а пряма CD (рис. 47) розташована паралельно до фронтальної площини проекцій $C'_1D'_1$.

В основі побудови аксонометричних проекцій лежить координатний метод. На рис. 48 показана побудова аксонометричної проекції точки A по її вторинним горизонтальній (рис. 48 а) та фронтальній (рис. 48 б) проекціям.

3.11.2. Стандартні аксонометричні проекції

Прямокутна диметрія, (ДСТ 2.317-69)

Положення аксонометричних осей приведене на рис. 49 а, їх побудова без транспортира показана на рис. 49 б. Показник спотворення по осі Y дорівнює 0,47, а по осях X і Z – 0,94. Диметричну проекцію, як правило, виконують без спотворення по осях X і Z та з коефіцієнтом спотворення 0.5 по осі Y, тобто користуються приведеним коефіцієнтом спотворення.

Тоді зображення виходить збільшеним у 1,06 рази ($\frac{1}{0{,}94}=\frac{0{,}5}{0{,}47}=1{,}06$), тобто аксонометричний масштаб для прямокутної диметрії буде $M^A = 1{,}06:1$. Кола, що лежать у площинах, паралельних до площин проекцій, проекціюються на аксонометричну площину проекцій в еліпси (рис. 49). Кола діаметра d, які лежать в площинах XOY і YOZ, проекціюються в рівні еліпси, велика вісь яких 2a = 1,06d, а мала – 2b = 0,35d, якщо користуватися приведеними коефіцієнтами спотворення. Коло, розташоване в площині XOZ, проекціюється в еліпс з осями: велика вісь 2a = 1,06d, мала вісь 2b = 0,95d (рис. 49). Діаметри кіл, що паралельні до координатних осей, спроекціюються у відрізки, паралельні до аксонометричних осей диметрії: $\ell^1 = \ell^3 = d$; $\ell^2 = 0{,}5d$, при цьому $\ell^1 \| O'X'$; $\ell^2 \| O'Y'$; $\ell^3 \| O'Z'$.

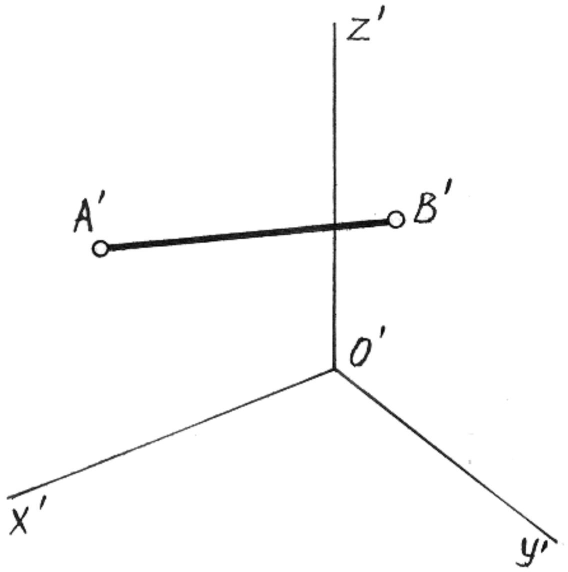


Рис. 46

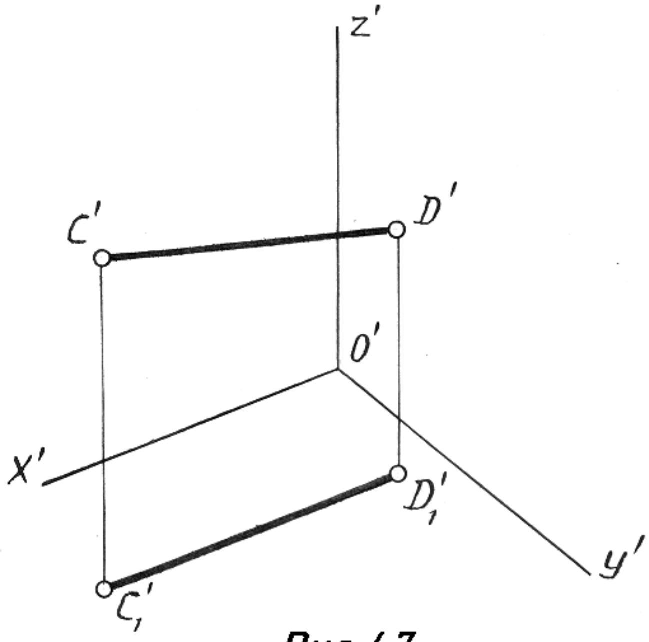


Рис. 47

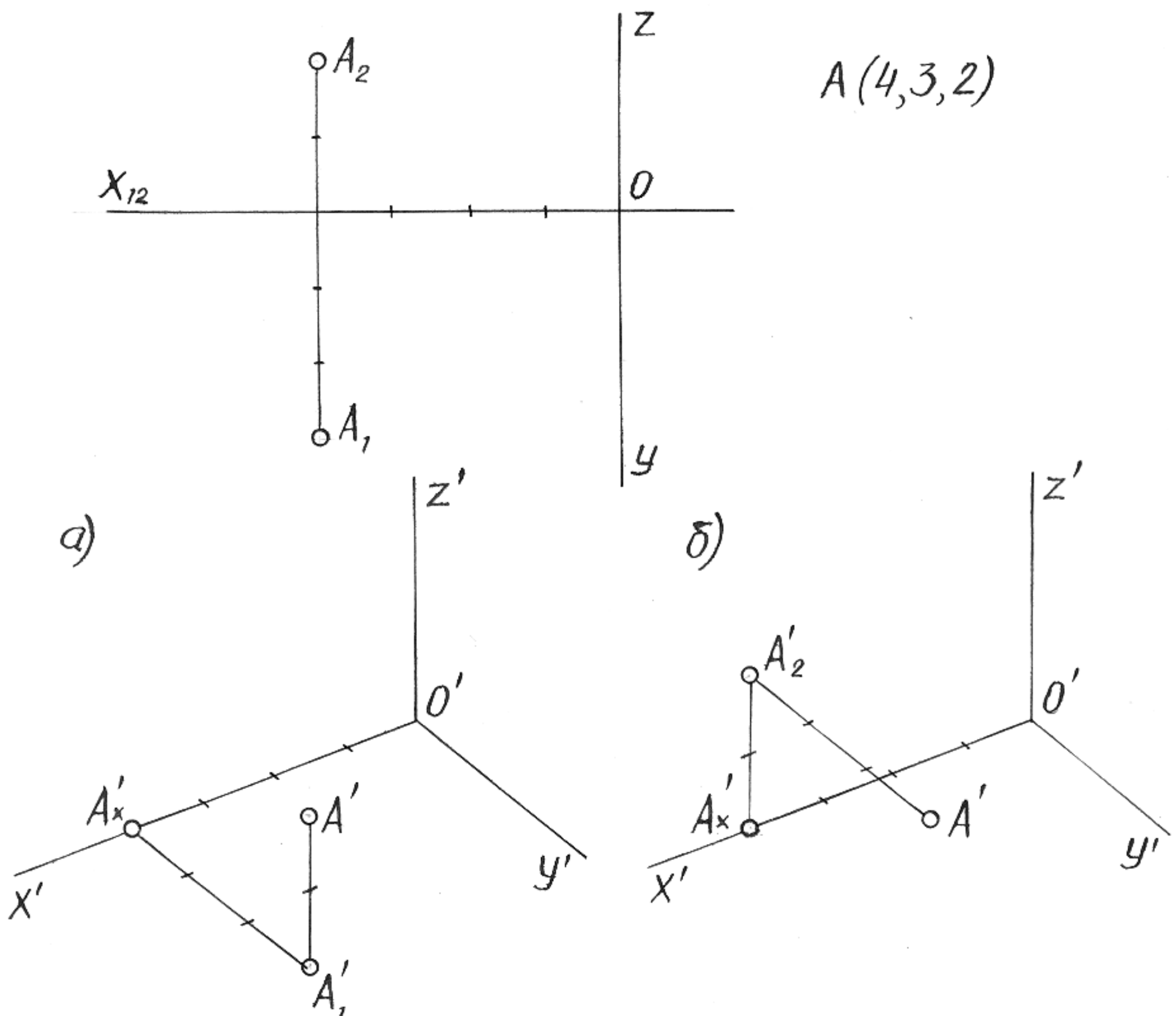
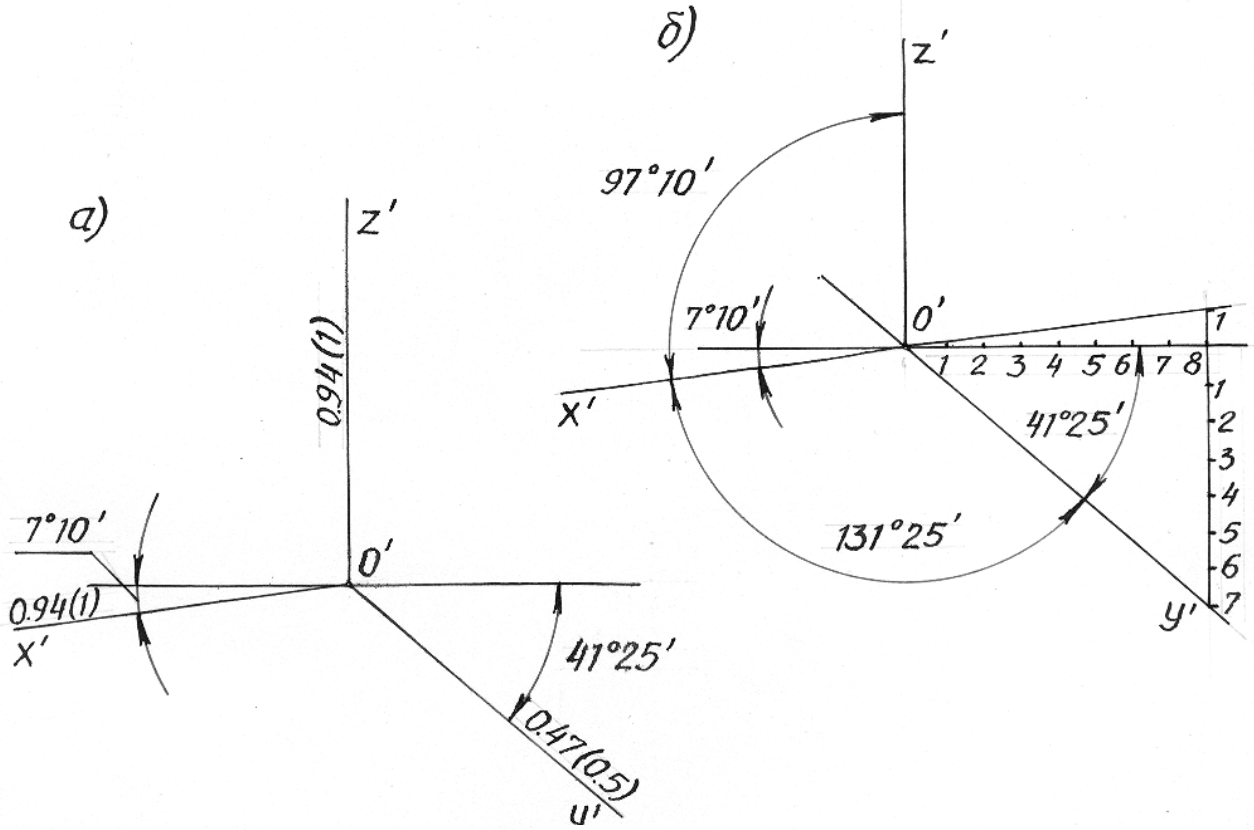


Рис. 48


а)
z'
0.94(1)
7°10'
0'
0.94(1)
x'
41°25'
0.47(0.5)
б)
z'
97°10'
7°10'
0'
x'
1 2 3 4 5 6 7 8
41°25'
131°25'
y'

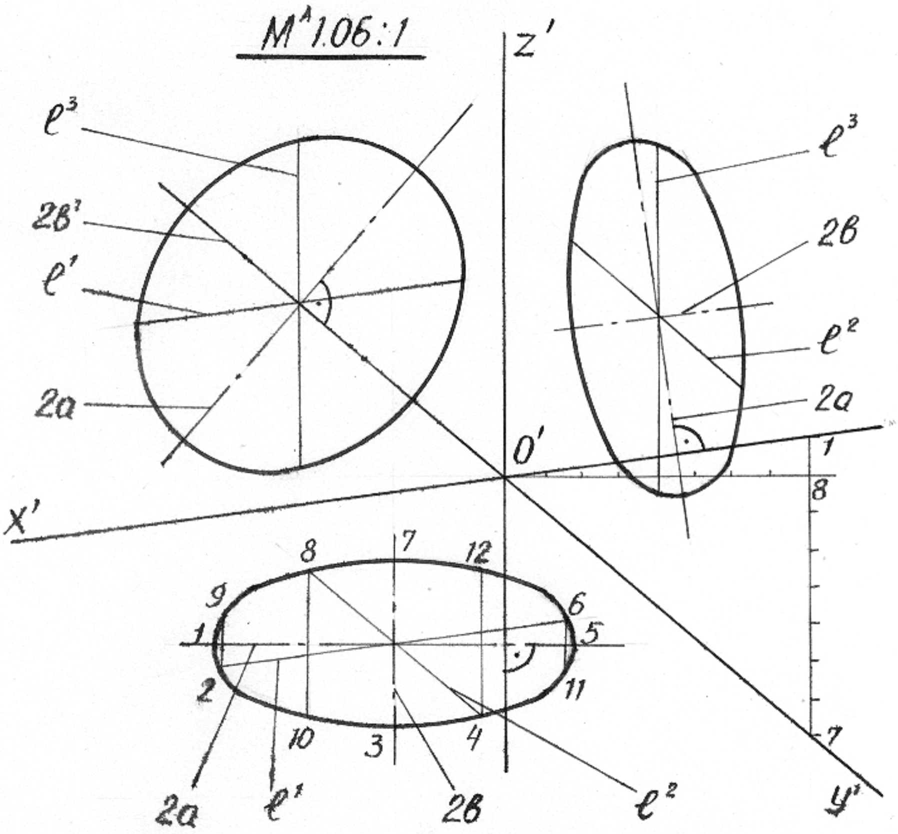

M^A 1.06:1
z'
ℓ³
2в'
ℓ'
2а
ℓ³
2в
ℓ²
2а
0'
x'
8 7 12
9 6
1 5
2 11
10 3 4
2а
ℓ'
2в
ℓ²
y'

Рис. 49

Можна побудувати крім зазначених точок ще чотири точки, симетричні точкам, що обмежують проекції діаметрів, паралельних до координатних осей. Тоді еліпс, як диметрію кола, можна побудувати по його дванадцяти точках.

На рис. 50 зображена побудова в приведених коефіцієнтах спотворення диметрії піраміди по вторинній фронтальній проекції. Для побудови аксіонометрії будь-якої точки на поверхні піраміди проводимо через неї допоміжну пряму (подальші побудови зрозуміли з креслення).

Прямокутна ізометрія (ДСТ 2.317-69)

Положення аксонометричних осей надане на рис. 51 б, а їхня побудова за допомогою циркуля показана на рис. 51 а. Практично ізометричну проекцію будують без спотворення по осях проекцій, тобто користуються приведеними коефіцієнтами спотворення, що по всіх осях дорівнюють одиниці. Тоді зображення в изометрії виходить збільшеним у 1,22 рази ($\frac{1}{0{,}82} = 1{,}22$), тобто аксонометричний масштаб для прямокутної ізометрії буде $M^A = 1{,}22 : 1$.

Кола, що лежать у площинах, паралельних до площин проекцій, проекціюються на аксонометричну площину проекцій в еліпси. Розміри осей еліпсів при використанні приведених коефіцієнтів спотворення рівні: велика вісь 2a = 1,22d, мала вісь 2b = 0,71d, де d – діаметр кола.

Діаметри кіл, паралельних до координатних осей, проекціюються відрізками, паралельними до ізометричних осей і рівними діаметру кіл: $\ell\ \ell^1 \ell^2 = \ell^3 = d$, при цьому $\ell^1 \| O'X'$; $\ell^2 \| O'Y'$; $\ell^3 \| O'Z'$.

Еліпс, як ізометрію кола, можна побудувати по восьми точках, що задають його велику і малу осі і проекції діаметрів, паралельних до координатних осей (рис. 52).

2.2.1. Приклади побудови ізометричних проекцій деяких поверхонь

Конус обертання

На рис. 53 зображений конус, перерізаний фронтально-проекціюючою площиною Σ, яку можна розглядати як грань поверхні будь-якого многогранника. У перетині виходить еліпс з великою (1 – 2) та малою (3 – 4) осями.

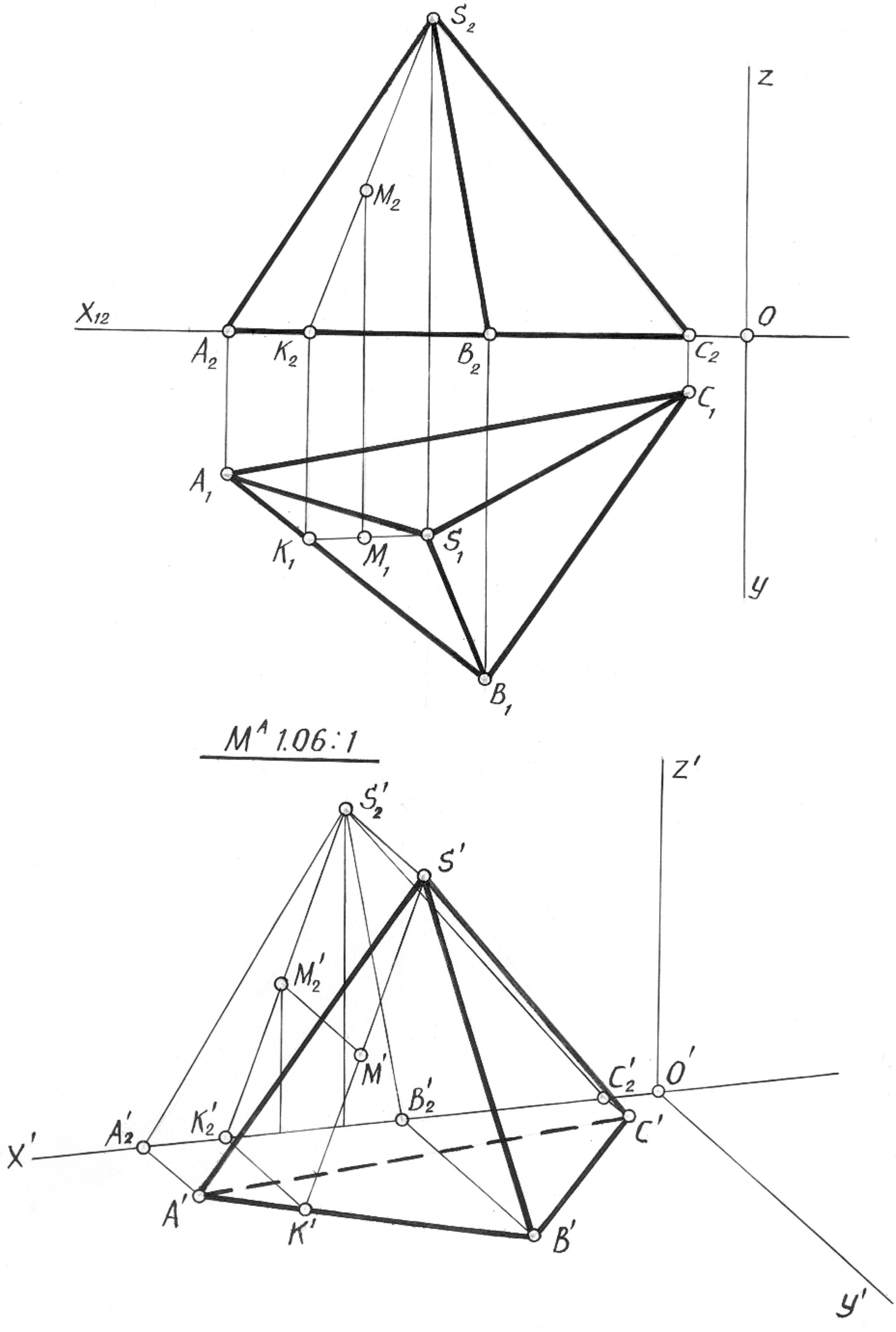
Для побудови горизонтальної проекції цього еліпса використовуємо допоміжні площини Δ і Г. Побудову аксонометрії зробимо в приведених коефіцієнтах спотворення по вторинній горизонтальній проекції. Будуємо аксонометричну проекцію основи конуса, його вершини і з точки S′ проводимо дотичні до еліпса в точках K′ і L′ – це твірні нариса конуса в аксонометрії, а $S'_1L'_1$ і $K'_1S'_1$ – їхні вторинні горизонтальні проекції. Далі будуємо вторинну горизонтальну проекцію лінії перетину. Точки N'_1 і M'_1 перетину вторинних проекцій нарисових твірних і лінії перетину дають можливість побудувати точки N′ і M′, що є точками перехідної видимості для лінії перетину в ізометрії.

Аксонометрична проекція будь-якої точки лінії перетину може бути побудована двома способами: чи за допомогою вторинної проекції самої точки (координатним способом, додаючи висоту точки), чи за допомогою вторинної проекції твірної, що проходить через точку (див. на рис. 53 побудова точки 7′ за допомогою твірної SA). Другий спосіб є більш точним.

Сфера. У косокутній аксонометрії обрисом сфери є еліпс, а в прямокутній – коло, тому сферу, як правило, зображують у прямокутній аксонометрії. На рис. 54 побудована прямокутна ізометрична проекція сфери діаметра *d* із трьома її головними меридианальними перерізами. Тому що побудова ізометрії зроблена без спотворення по осях, то зображення виходить збільшеним у 1,22 рази, отже нарисом сфери буде коло з діаметром, що дорівнює 1,22d.

Якщо сфера будується в прямокутній диметрії без спотворення по осях проекцій, то обрисом буде коло з діаметром 1,06d.

Тор. Тор належить до поверхонь, що обгортають сімейство сфер. При побудові в аксонометрії таких поверхонь користуються прямокутними аксонометричними проекціями. На рис. 55 зображена половина тора, поверхня якого обгортає сімейство сфер радіуса R. Будуємо прямокутну ізометрію поверхні, помістивши початок координат у точку O (застосовуємо паралельний перенос осей проекцій).



S_2
z
M_2
X_{12}
O
A_2
K_2
B_2
C_2
C_1
A_1
K_1
M_1
S_1
y
B_1
M^A 1.06 : 1
Z'
S_2'
S'
M_2'
M'
C_2'
O'
B_2'
A_2'
K_2'
C'
X'
A'
K'
B'
y'

Рис.50

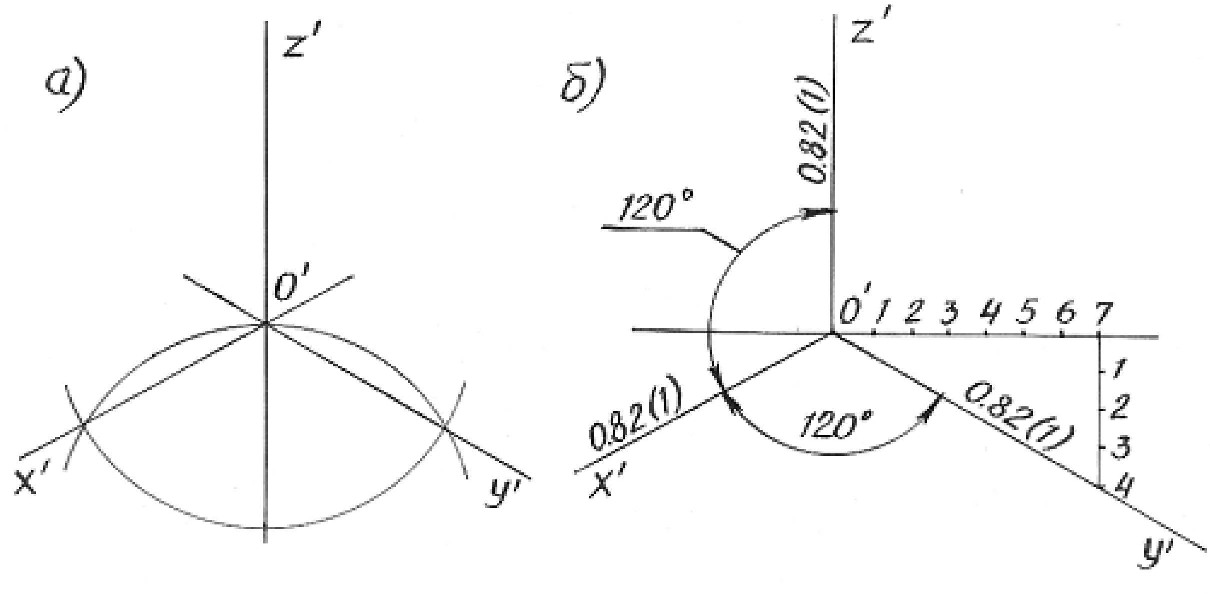

а)
z'
o'
x'
y'
б)
z'
0.82(1)
120°
o' 1 2 3 4 5 6 7
1
2
3
4
0.82(1)
120°
0.82(1)
x'
y'

Рис.51

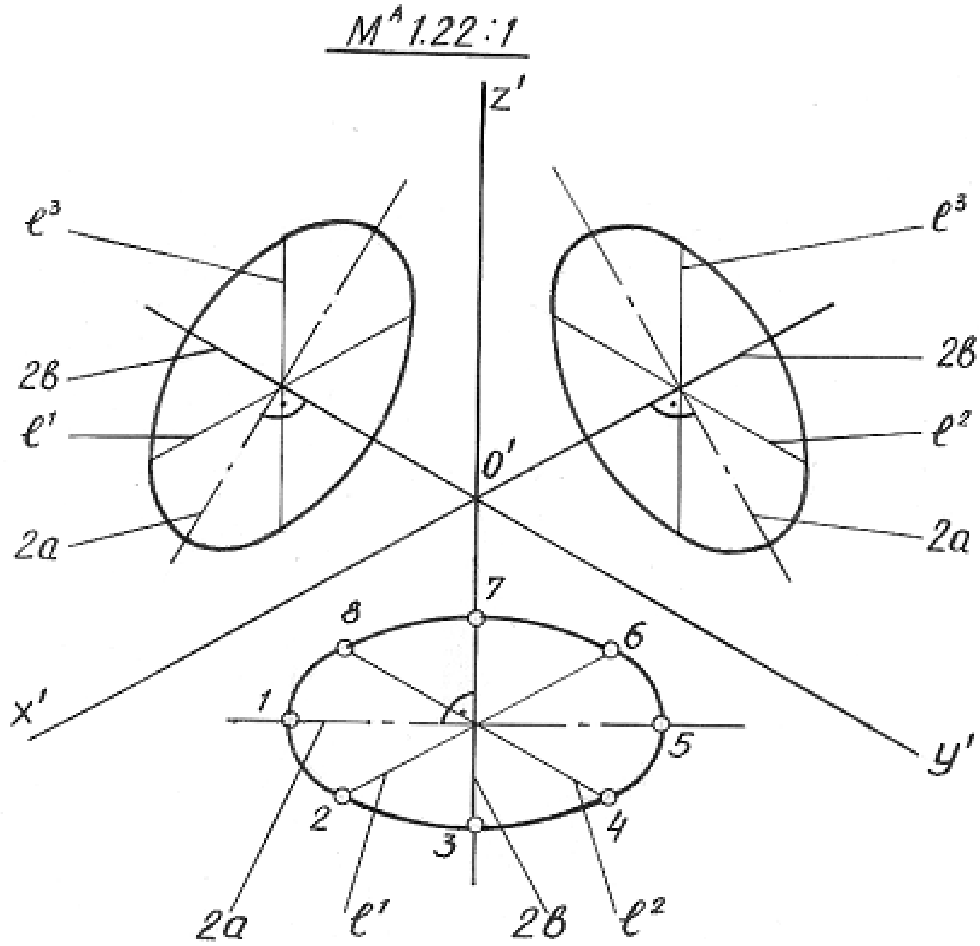

M^A 1.22 : 1
z'
ℓ³
2в
ℓ¹
2a
ℓ³
2в
ℓ²
2a
o'
x'
y'
7
8
6
1
5
2
3
4
2a
ℓ¹
2в
ℓ²

Рис.52

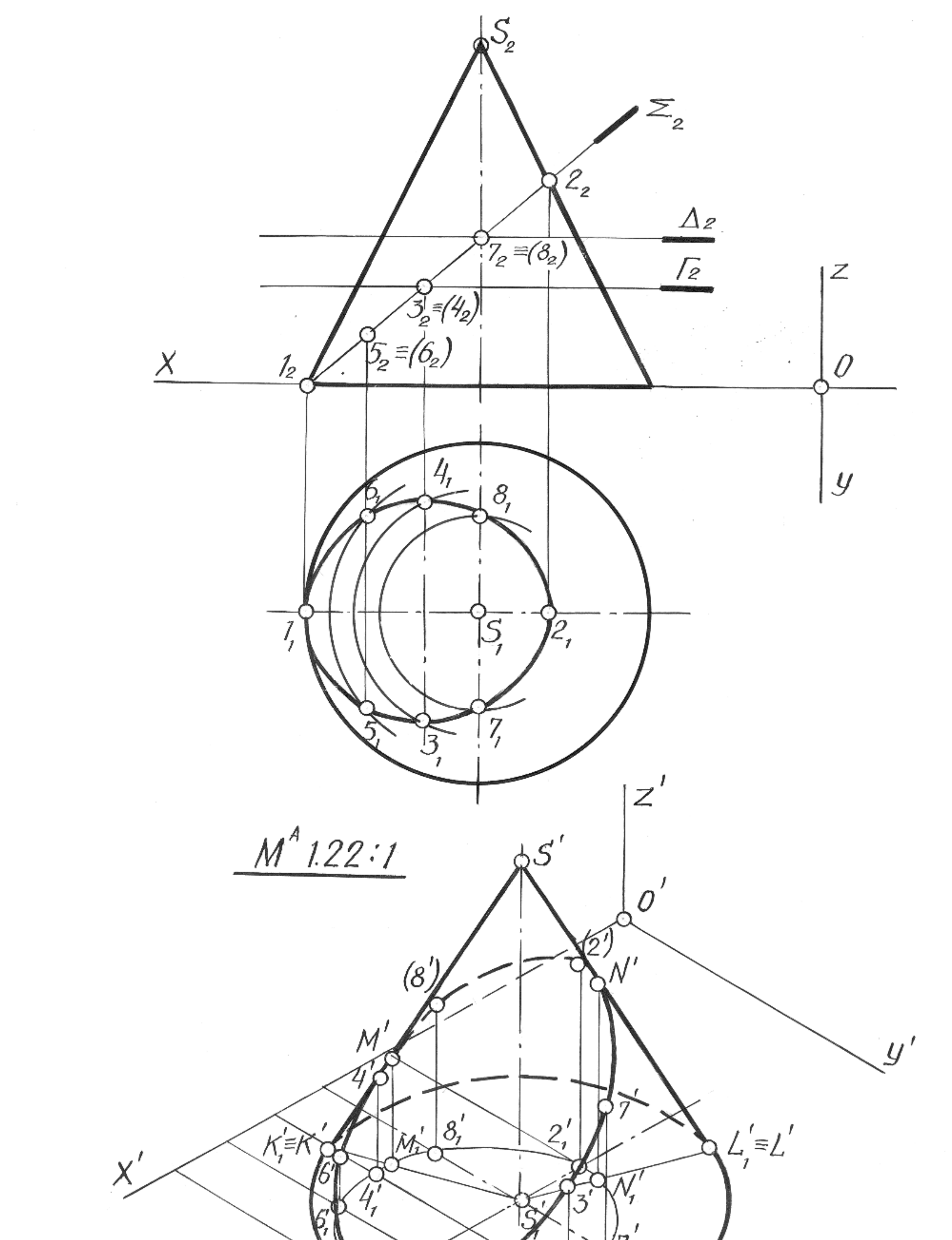

S₂
Σ₂
2₂
Δ2
7₂ ≡(8₂)
Γ2
Z
3₂ ≡(4₂)
5₂ ≡(6₂)
X
1₂
0
y
4₁
6₁
8₁
1₁
S₁
2₁
5₁
3₁
7₁
Z'
M^A 1.22:1
S'
0'
(2')
(8')
N'
M'
y'
4'
7'
K₁'≡K'
M₁'
8₁'
2₁'
L₁'≡L'
X'
6'
4₁'
3'
N₁'
6₁'
S'
7₁'
5'
3₁'
A₁'≡A'
1₁'≡1'
5₁'

Рис.53

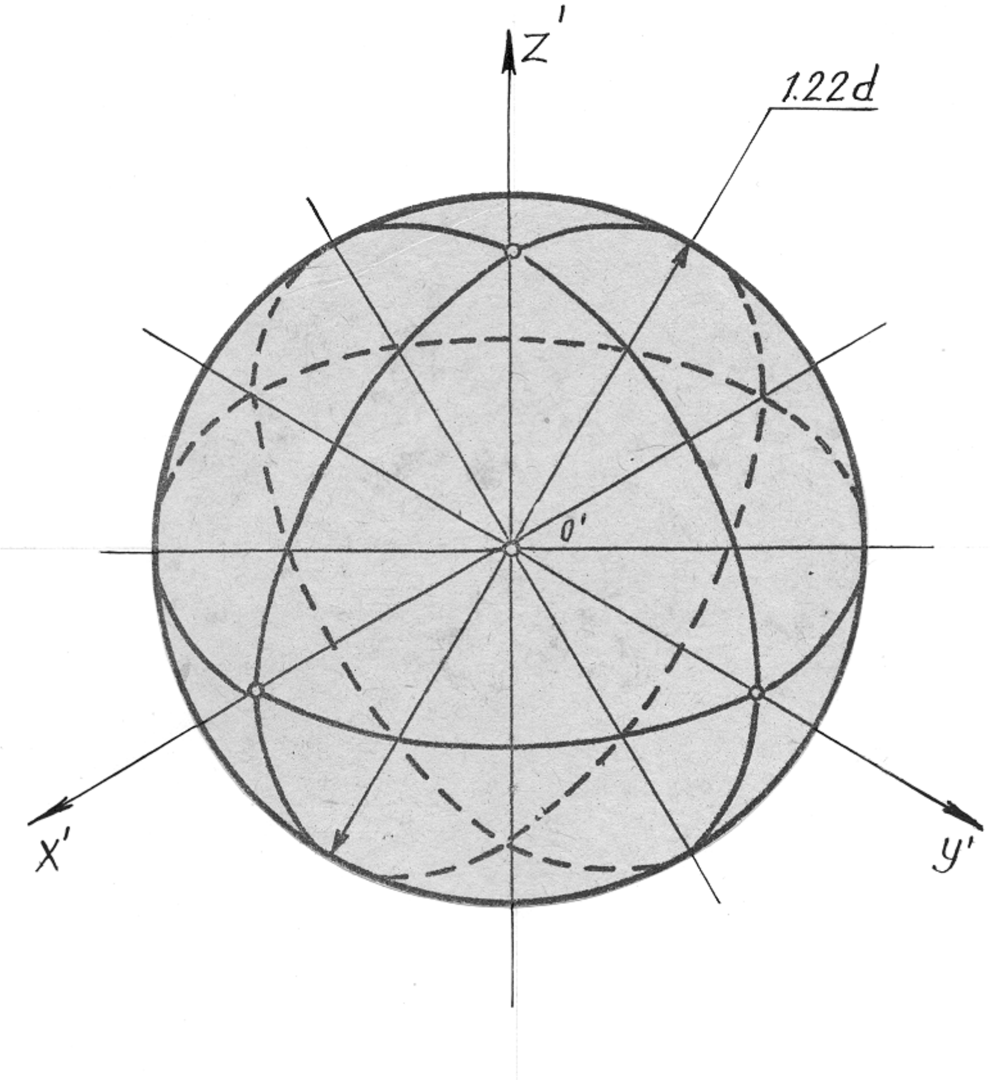
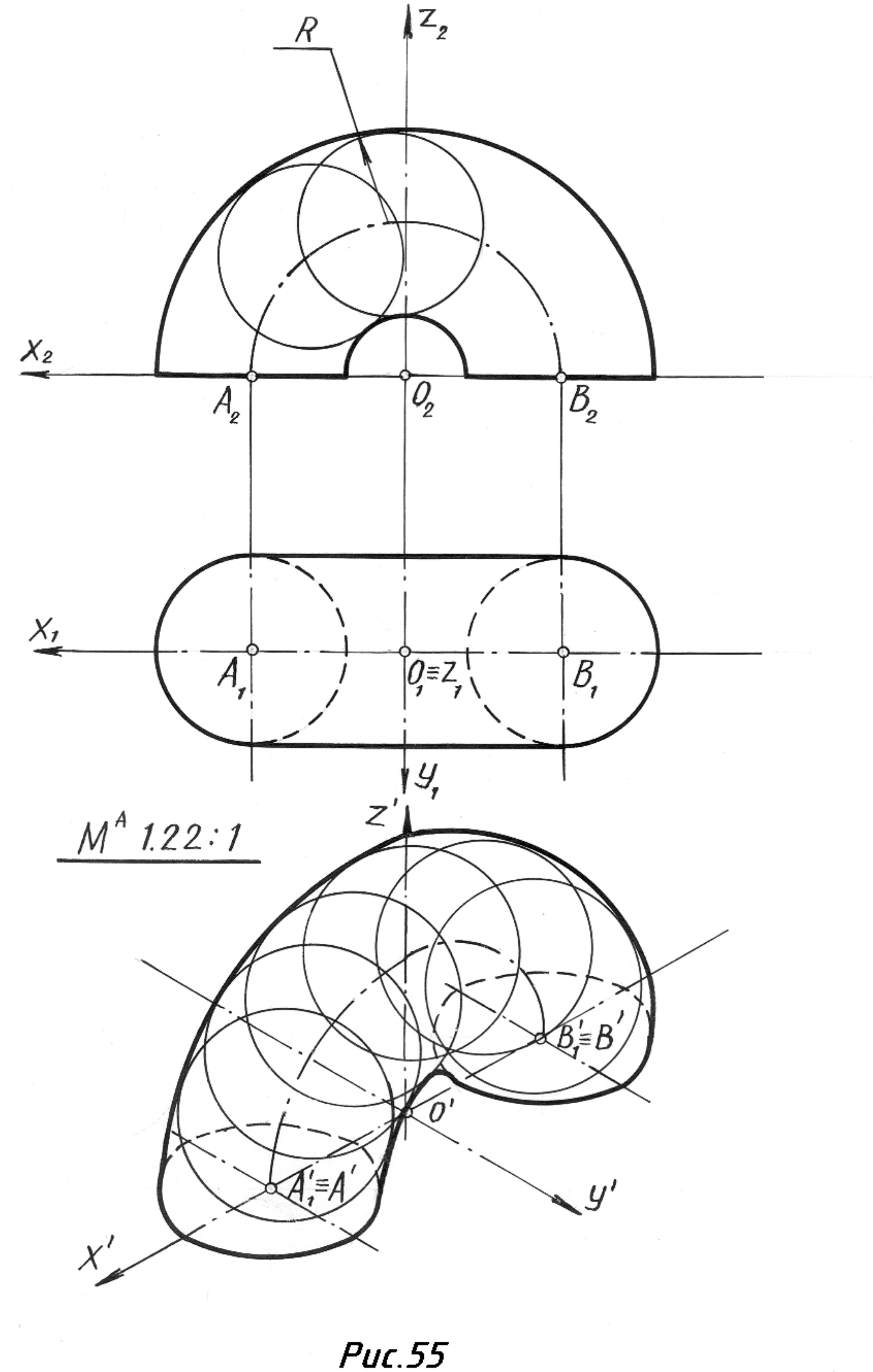


Рис.54



R
Z_2
X_2
A_2
O_2
B_2
X_1
A_1
$O_1 \equiv Z_1$
B_1
Y_1
M^A 1.22 : 1
Z'
$B_1' \equiv B'$
O'
$A_1' \equiv A'$
Y'
X'

Рис.55

Визначивши на осі X′ точку A′ , будуємо аксонометрію кола – перетину тора горизонтальною площиною, для якого точка А є центром. Т.к. побудову ведемо без спотворення по осях проекцій, то велика вісь еліпса буде в 1,22 рази більше діаметра перетину. Будуємо точку B′ ($A'B' = A_2B_2$) і з неї, як з центра -аналогічний еліпс. Далі будуємо аксонометрію півкола (кругової осі тора) – еліпс, що проходить через точки A′B′. Взявши на цьому еліпсі деяке число точок і прийнявши їх за центри, проводимо кола радіуса 1,22R, що являють собою аксонометрію сфер, які обгортає тор. Проводимо криві лінії, дотичні до кіл, що є лініями нарису тора. Нижня лінія нарису в місці згущення кіл переходить усередину проекції тора. В даному випадку при побудові аксонометрії тора використана в схованому виді вторинна горизонтальна проекція.

3.11.4. Приклади побудови аксонометричних проекцій поверхонь, які перетинаються між собою

Приклад 1. Прямокутна ізометрична проекція поверхонь призми і циліндра, що перетинаються (рис. 56).

Розв'язування починаємо з побудови нижньої основи циліндра, узявши його центром точку 0′ – початок ізометричних осей X′ *Y′ Z′*. Вісь циліндра вважаємо співпадаючої з віссю O′ Z′. Через O′ проводимо пряму, перпендикулярну O′ Z′. На цієї прямої відкладаємо відрізок, рівний 1,22d (діаметра циліндра) – тобто велику вісь еліпса. Мала вісь його збігається з віссю *O′Z′*. На ній відкладаємо відрізок, рівний 0.71d- тобто малу вісь еліпса. На осях O′X′ і O′Y′ – відрізки, рівні d. Знайдені на кінцях відрізків точки з'єднуємо між собою плавною кривою, одержуємо нижню основу циліндра у виді еліпса. Відклавши по осі *O′Z′* висоту циліндра, будуємо через отриману точку верхню основу циліндра аналогічно попередній. З'єднуємо кінці великих осей еліпсів верхньої і нижньої основ, одержуємо аксонометричну проекцію поверхні циліндра.

Побудову аксонометричної проекції призми ведемо за допомогою її вторинної горизонтальної проекції, що виконується за допомогою координат X и Y кожної точки, узятих з ортогональної проекції. З кожної точки побудованої вторинної горизонтальної проекції проводимо прямі, паралельні до осі O′Z′, і відкладаємо на них висоти точок призми (тобто їхньої координати Z). Знайдені точки (наприклад A') ізометричної проекції відповідно їхнім фронтальним проекціям з'єднуємо між собою й одержуємо аксонометричну проекцію призми.

Для побудови лінії перетину поверхонь визначаємо положення її вторинної горизонтальної проекції, що збігається з нарисом основи циліндра. Фіксуємо точки перетину ребер C'_1 і B'_1 із вторинною горизонтальною проекцією основи циліндра ($1'_1\ 2'_1\ 3'_1\ 4'_1$).

Провівши з цих точок прямі, паралельні до осі O′Z′, до перетину з аксонометричними проекціями ребер C′ и B′, визначаємо положення аксонометричних проекцій точок 1′, 2′, 3′, 4′ Знайшовши положення усіх вторинних горизонтальних проекцій точок лінії перетину на вторинній горизонтальній проекції основи циліндра, будуємо їхні аксонометричні проекції.

Наприклад, визначимо положення точок $7'_1 = 8'_1$. Для цього відрізок а, що дорівнює координаті X цих точок, узятий з ортогонального кресленика, відкладаємо на осі O′X′ праворуч від точки O′ і проводимо пряму, паралельну до осі O′Y′. Там, де ця пряма перетинається з еліпсом основи циліндра, фіксуємо точки $7'_1 \equiv 8'_1$. З них проводимо пряму, паралельну до осі O′Z′ і відкладаємо на ній висоти цих точок, узяті з ортогонального кресленика.

Для побудови точок L′ і K′, що лежать на лівої твірної нарису циліндра в аксонометричній проекції, визначаємо положення відрізка прямої, яка проходить на відстані b паралельно до осі O′Y′, через кінці якої проходять твірні циліндра й одна з них – нарисова. Знаходимо положення цих твірних на ортогональному кресленні, відклавши там відрізок b по осі X ліворуч від O_1.

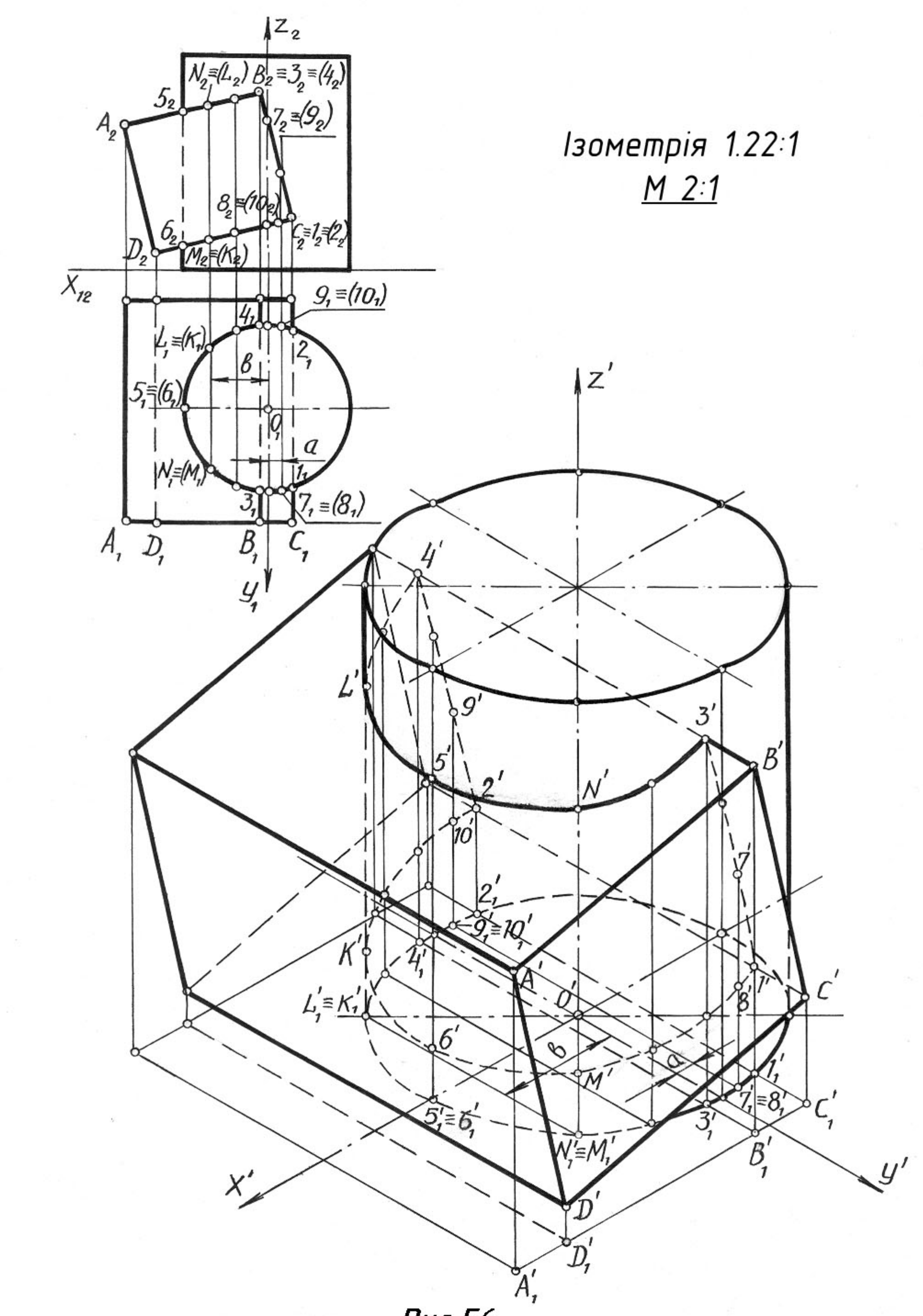


Рис.56

Фіксуємо точки $N_1 \equiv M_1$ і $K_1 \equiv L_1$ і визначаємо положення їхніх фронтальних проекцій (N_2, M_2, K_2, L_2). Визначивши висоти точок К і L на ортогональному кресленні, відкладаємо їх на лівої твіної нарису циліндра в аксонометричній проекції. Одержимо точки K' і L', а також симетричні їм N' і M'.

З'єднуємо всі аксонометричні проекції точок лінії перетину по гранях призми з урахуванням характеру кривої, визначаючи видимість точок лінії перетину за аналогією з визначенням видимості в ортогональних проекціях.

Приклад 2.

Побудова аксонометричної проекції (прямокутної ізометрії) поверхонь піраміди і циліндра (рис. 57), які перетинаються, ведеться за допомогою вторинних фронтальних проекцій цих поверхонь. Міркування щодо побудов аналогічні прикладу, розглянутому на рис. 56.

3.12. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Як будується аксонометричний кресленик?
2. Що таке показник (коефіцієнт) спотворення?
3. Які види аксонометрії найчастіше використовуються у кресленні?
4. Як розташовуються осі прямокутної ізометрії? Чому рівні натуральні і приведені показники спотворення в прямокутній ізометрії?
5. Який масштаб зображення в стандартній прямокутній ізометрії?
6. Як розташовуються осі прямокутної диметрії? Чому рівні натуральні і приведені показники спотворення в прямокутній диметрії?
7. Який масштаб зображення в стандартній прямокутній диметрії?
8. Чому рівні велика і мала осі еліпса в прямокутній ізометрії? У прямокутній диметрії?

ЛІТЕРАТУРА ДО ЧАСТИНИ 3

1. Михайленко В.Є., Пономарьов А.М. Інженерна графіка. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1990. – 295 с.
2. Начертательная геометрия: Учеб. для ВУЗов / Н. Н. Крылов и др.- 6 изд. – М.: Высшая школа 1990, – 240с.
3. Чекмарев А.А. Инженерная графика: Учеб. для немаш. спец. ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1988. – 335с.
4. Единая система конструкторской документации (ЕСКД, номера ГОСТов указаны в тексте пособия).

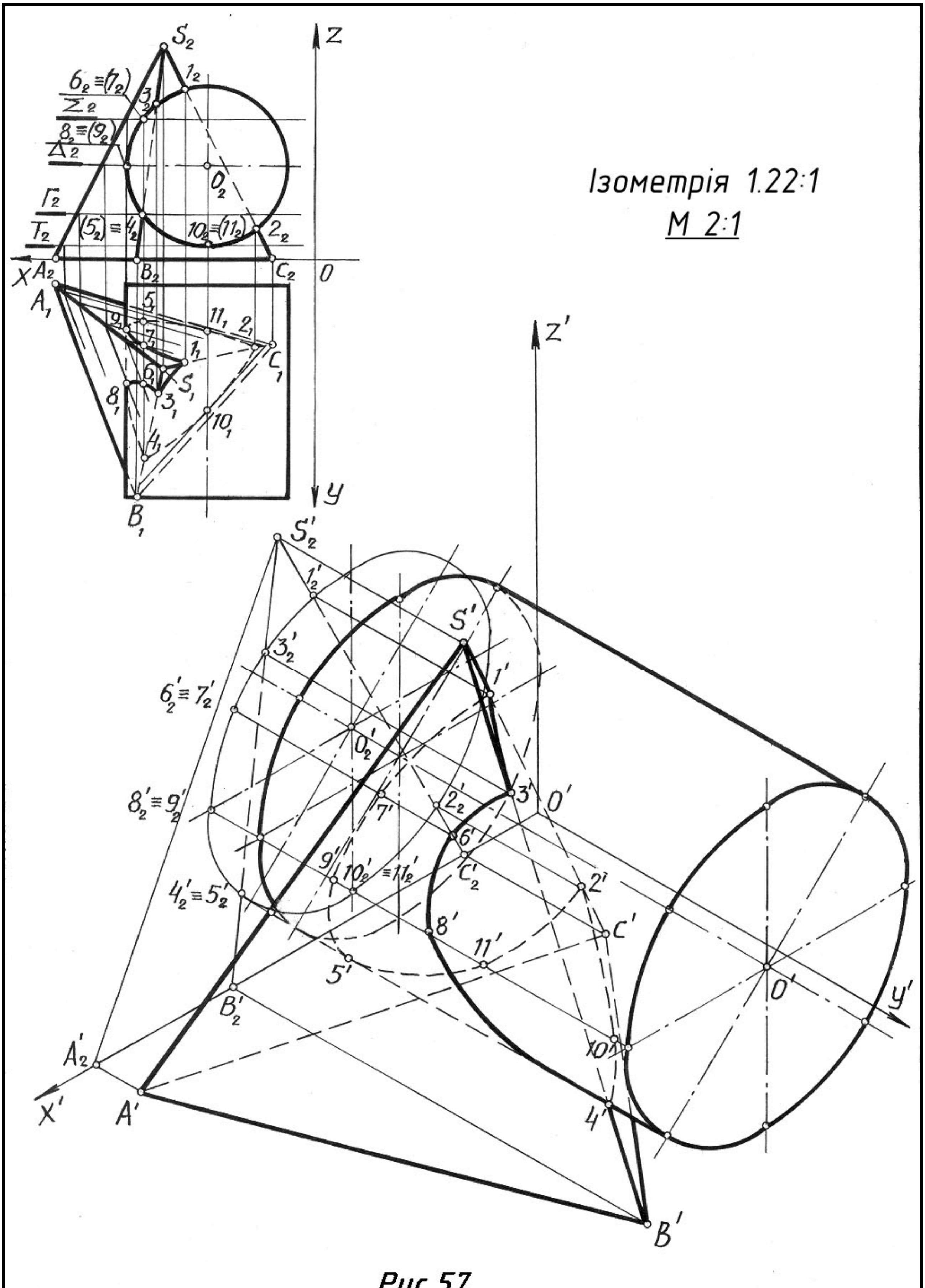


Рис.57

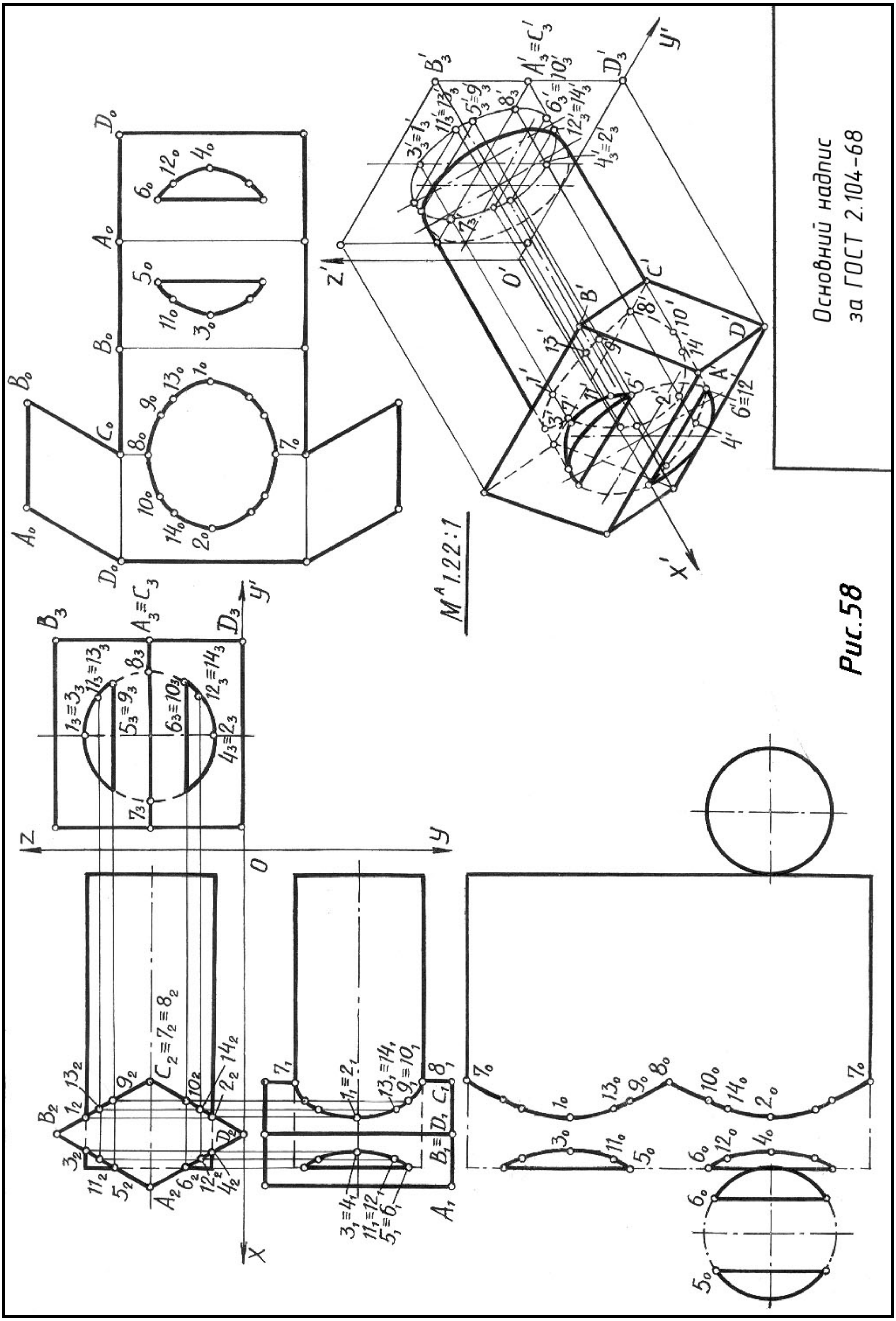


Рис.58

ЧАСТИНА 4.
САМОКОНТРОЛЕР

1. Пропонується 26 карт систематизованого матеріалу з курсу нарисної геометрії. Після прослуховування лекції або вивчення теми по підручнику треба перевірити засвоєння матеріалу по карті самоконтролю з даної теми.

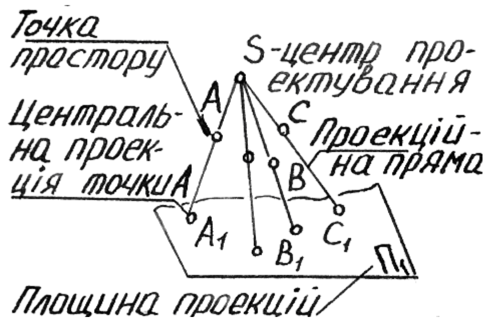
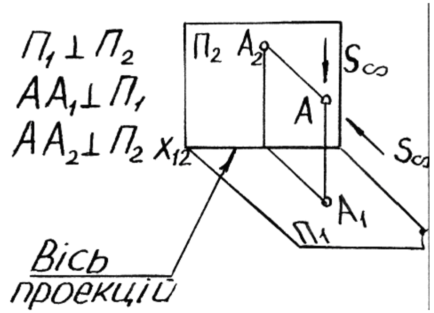
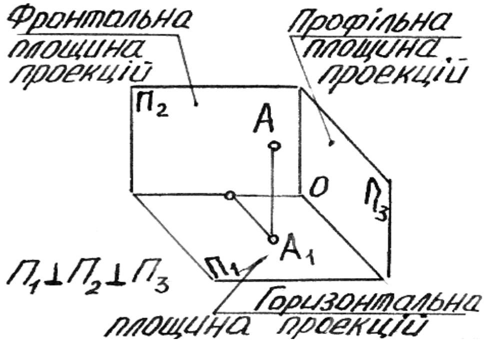
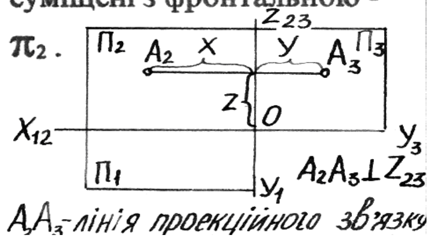
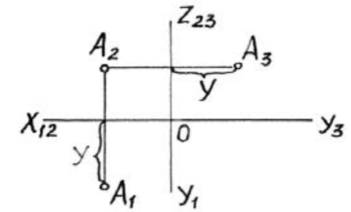
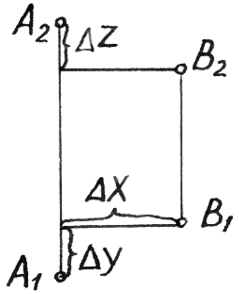
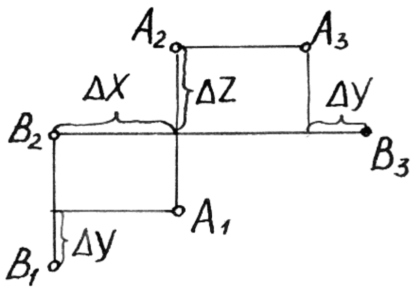
2. Карта вміщує три питання-завдання - I, II, III; на кожне з них дано три відповіді - 1, 2, 3, які вміщують вірну пізнавальну інформацію, але тільки одна відповідь в кожному горизонтальному рядку (I, II, III) повністю відповідає питанню-завданню.

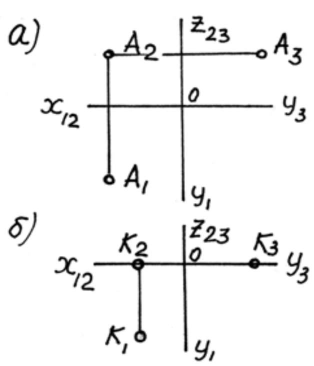
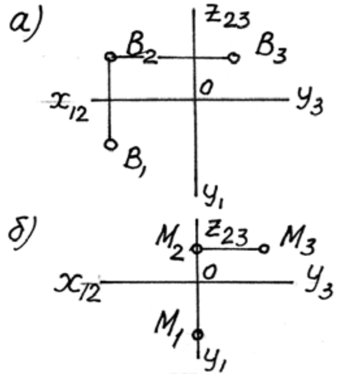
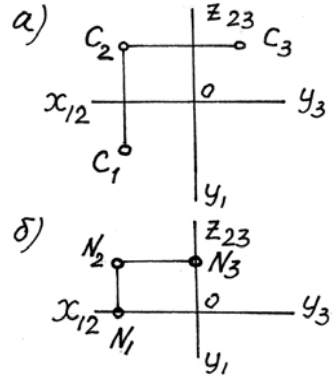
Вірну відповідь треба знаходити шляхом аналізу кожної з наданих відповідей. Питання, які при цьому виникають, треба вирішувати шляхом більш уважного прогляду вивченого матеріалу.

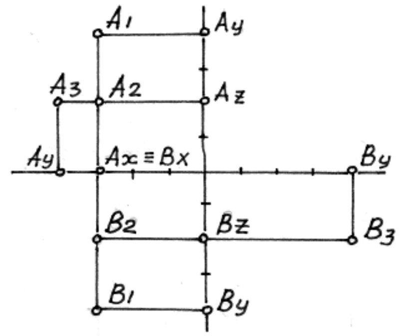
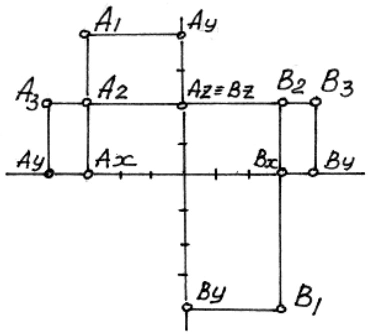
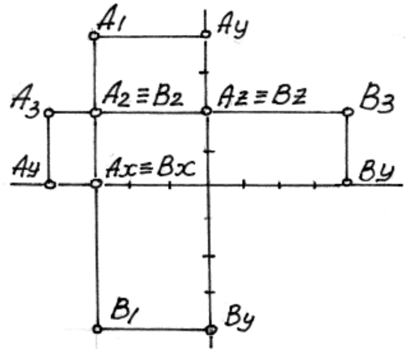
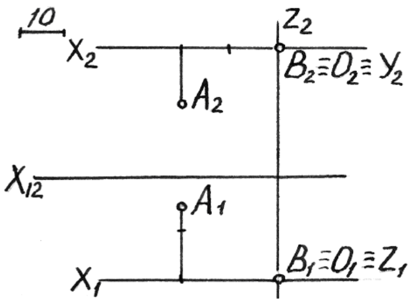
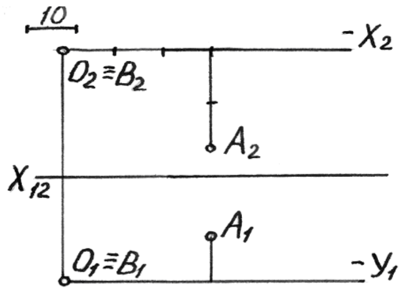
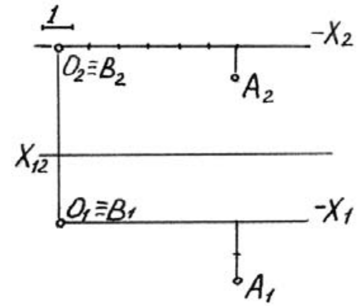
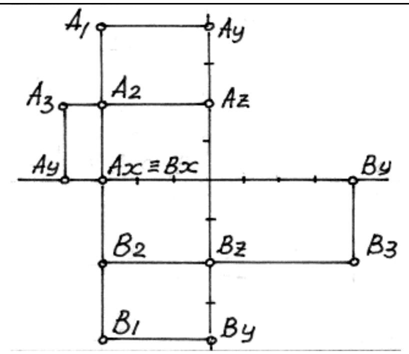
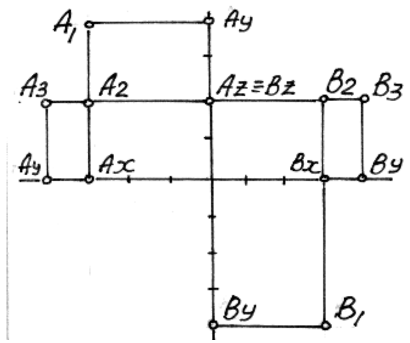
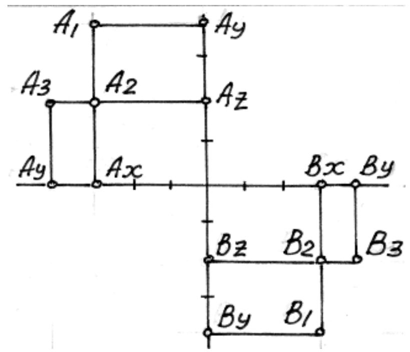
Вірні відповіді на кожне запитання карт приведені у таблиці на стор. 137.

Відповіді до карт самоконтролю

№ карти	1 питання	2 питання	3 питання
1	3	3	2
2	1	1	1
3	1	2	3
4	2	3	2
5	2	3	3
6	1	1	3
7	1	3	2
8	3	3	1
9	2	2	1
10	2	3	1
11	3	2	2
12	2	2	1
13	3	1	3
14	1	3	3
15	3	1	2
16	3	2	1
17	1	2	3
18	1	1	3
19	1	3	2
20	3	1	2
21	1	1	3
22	1	1	2
23	3	1	1
24	2	1	3
25	2	1	1
26	2	3	2

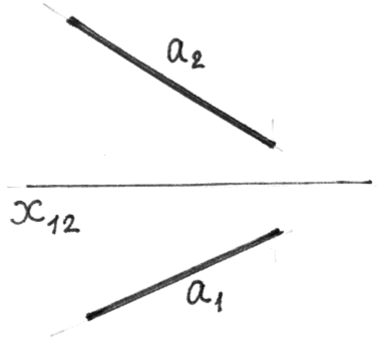
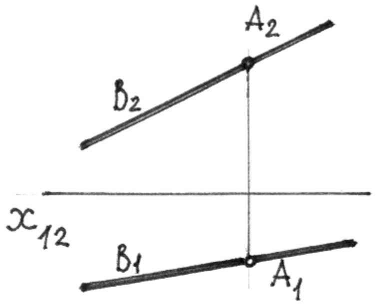
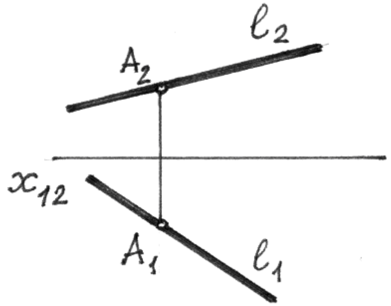
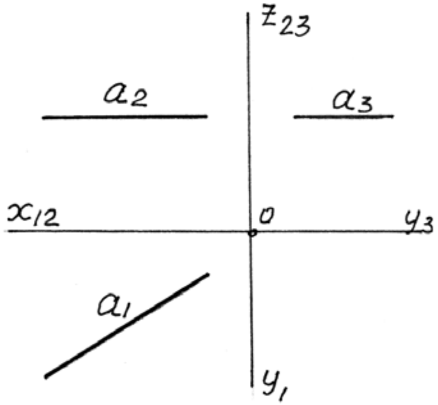
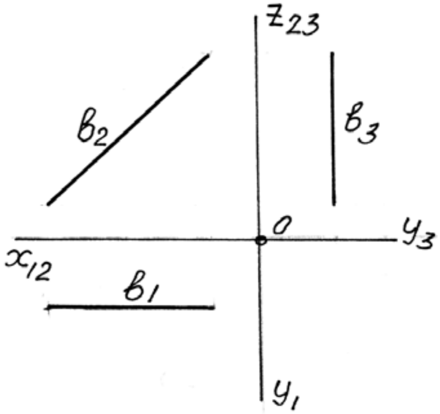
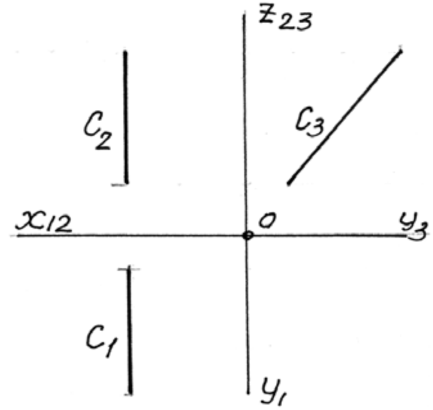
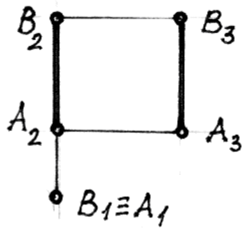
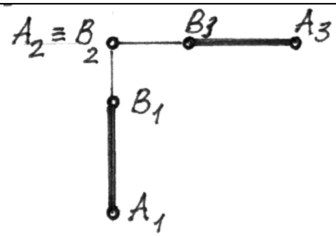
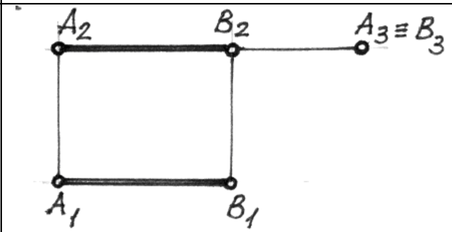
КАРТА №1 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ, ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТА ВІДНОСНІ КООРДИНАТИ ТОЧКИ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Укажіть результат проектування, який дає зворотне креслення точки А.	Центральне (конічне) проектування 	Паралельне (циліндричне) проектування 	Ортогональне проектування 
II	Укажіть зображення точки А з надлишковою проекцією.		**Площина проекцій π_1 та π_3 суміщені з фронтальною - π_2.** 	Комплексне креслення точки А (трьохкартинне) 
III	Покажіть креслення, на якому зображена точка В правіше, нижче та дальше від спостерігача, чим точка А.	Комплексне креслення точок А і В (двохкартинне). 	Безосне креслення точок А і В (двохкартинне) 	Безосне креслення точок А і В (трьохкартинне). 

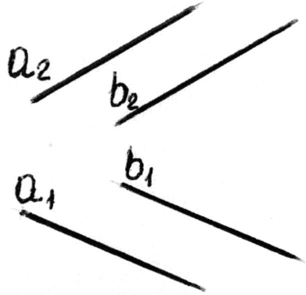
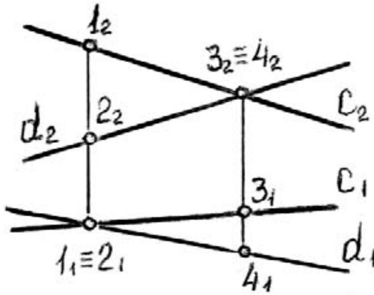
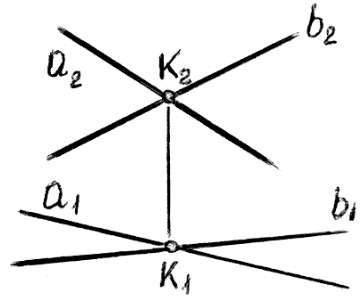
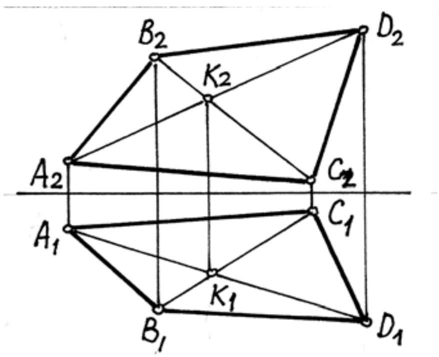
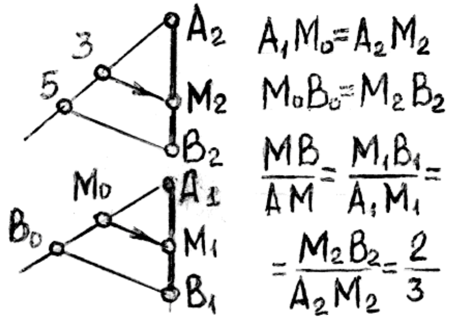
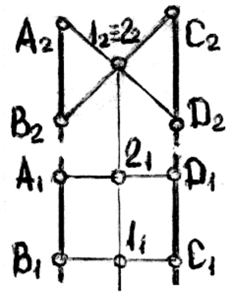
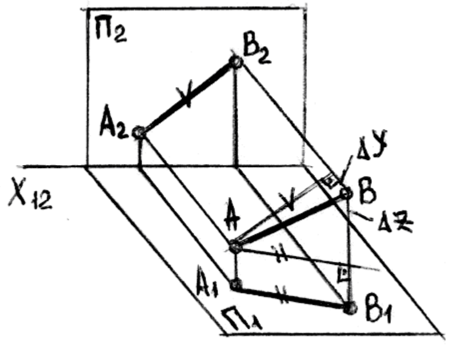
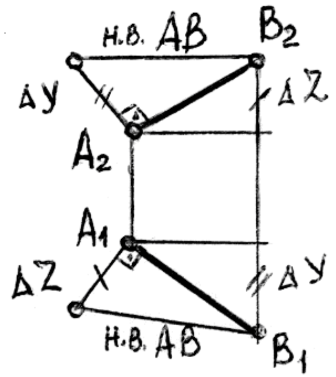
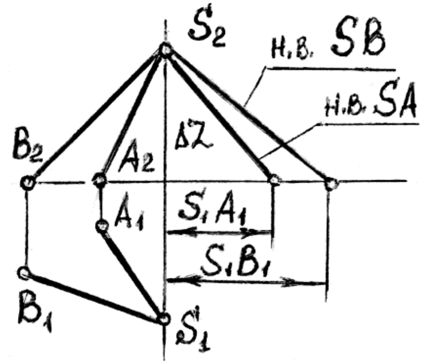
КАРТА №2 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: КРЕСЛЕНИК ТОЧКИ.				
№ № п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Виберіть один варіант із трьох, в якому записані координати: в «а» - для горизонтальної, в «б» - для фронтальної , в «в» - для профільної проекції точки.	а) X, Y б) X, Z в) Z, Y	а) Z, Y б) X, Y в) X, Z	а) X, Z б) Z, Y в) X, Y
II	Покажіть на один варіант із трьох, в якому записані: в «а» - координата, яка визначає відстань точки простору від горизонтальної ($П_1$), в б) – від фронтальної ($П_2$), в в) – від профільної ($П_3$) площин проекцій.	а) Z б) Y в) X	а) X б) Z в) Y	а) Y б) X в) Z
III	Оберіть точку, розташовану: а) до $П_1$ ближче, чим до $П_2$; б) в площині $П_1$			

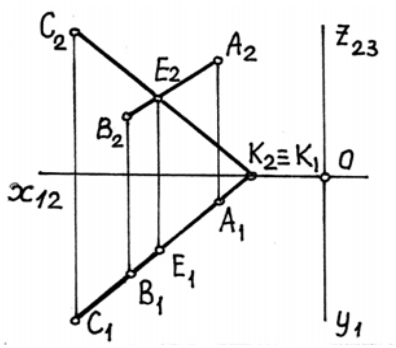
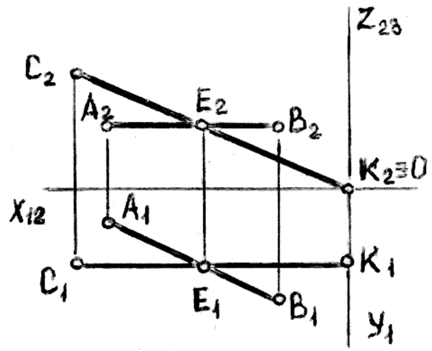
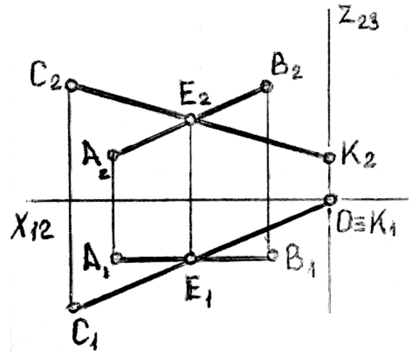
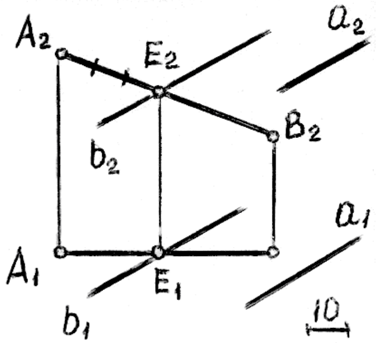
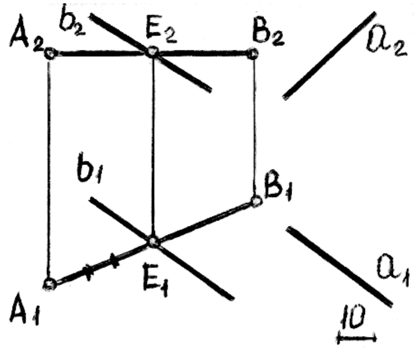
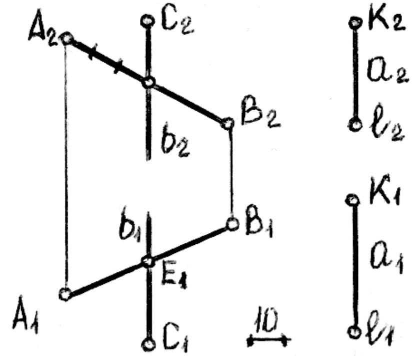
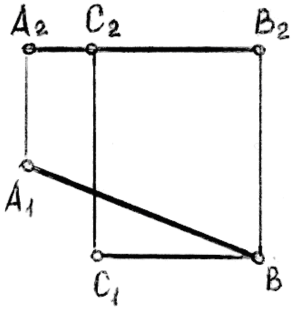
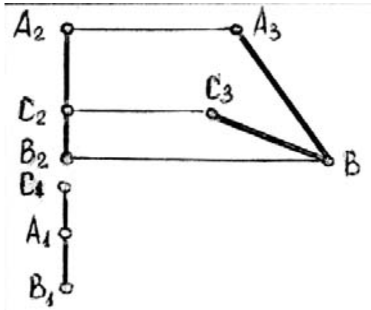
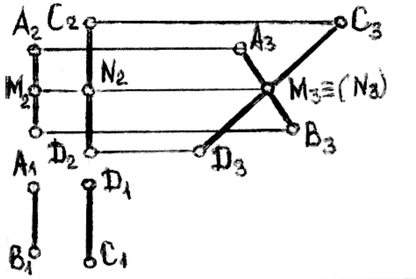
<table>
<tr><td colspan="5">КАРТА №3 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТЕМА: ЗВ'ЯЗОК ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ ТОЧКИ З ЇЇ ПРЯМОКУТНИМИ КООРДИНАТАМИ.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№
п/п</td><td rowspan="2">ЗАПИТАННЯ</td><td colspan="3">ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>I</td><td>На якому кресленику, з трьох наданих, зображена точка B, симетрична точці A відносно осі проекцій OX</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>Виберіть точку A з від‘ємними X, Y, Z відносно точки B(0,0,0), яка прийнята за початок координат.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>III</td><td>На якому кресленику, з трьох наданих, зображена точка B, симетрична точці A відносно початку осей координат</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

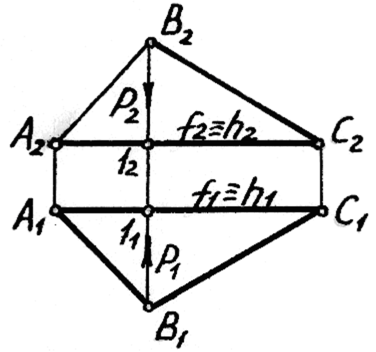
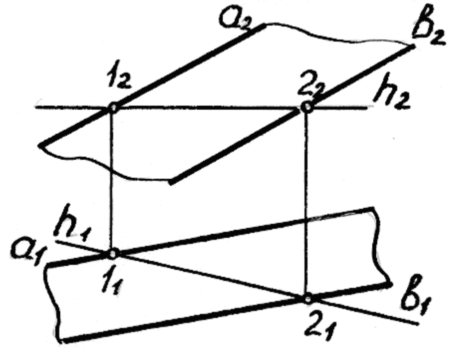
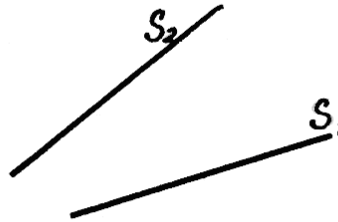
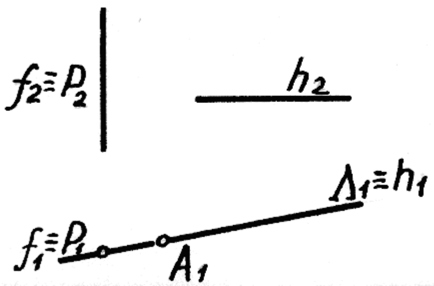
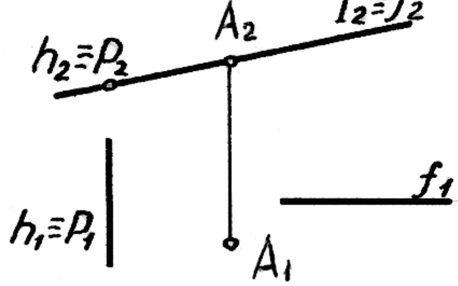
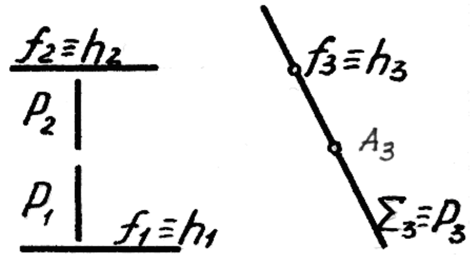
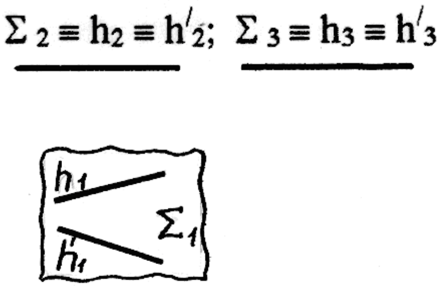
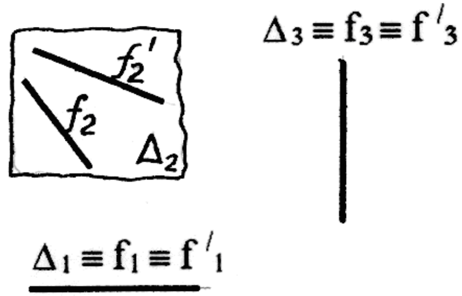
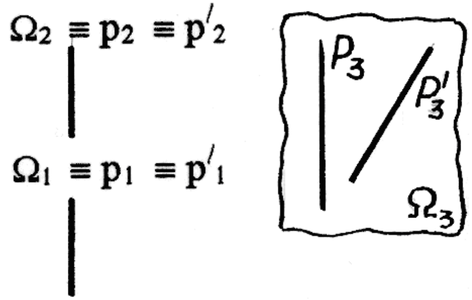
КАРТА №4 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

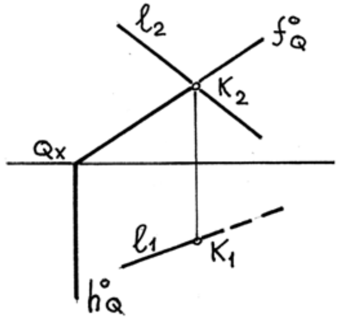
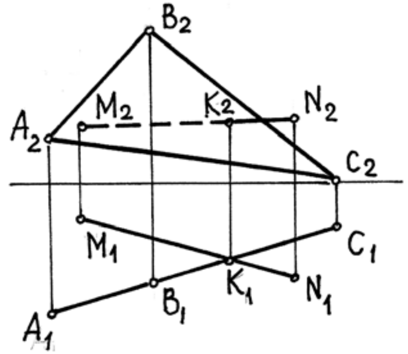
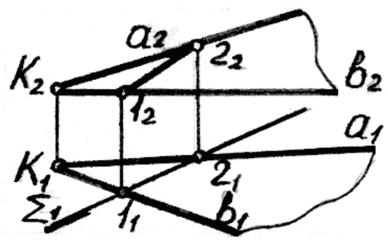
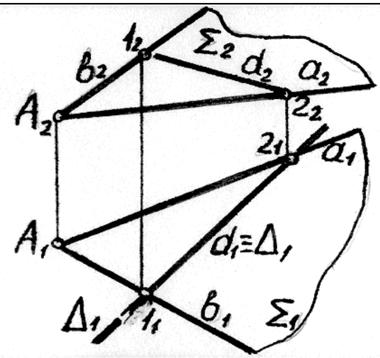
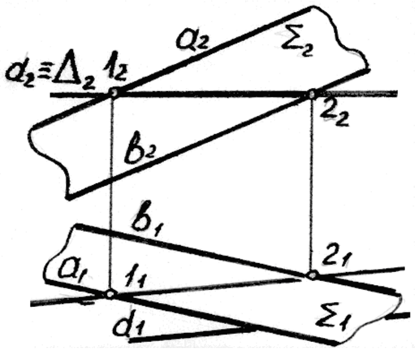
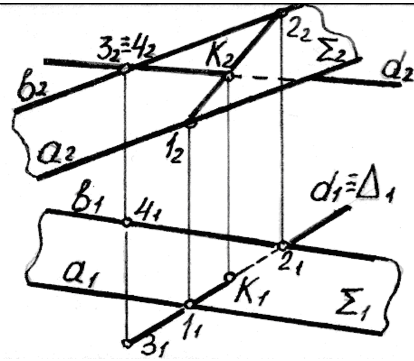
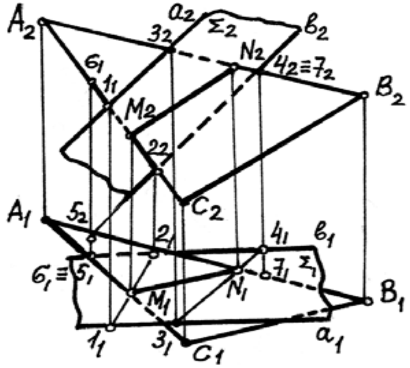
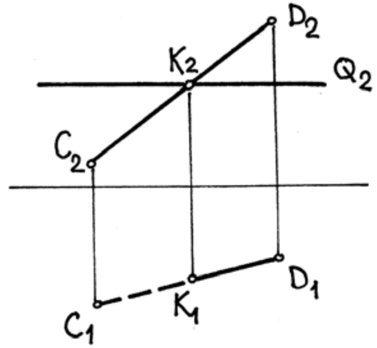
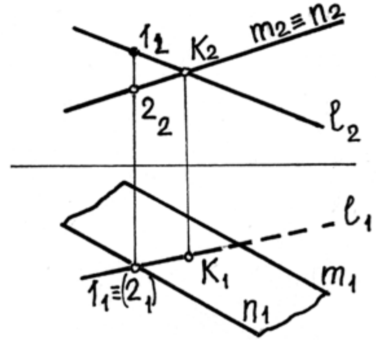
ТЕМА: КРЕСЛЕНИК ПРЯМОЇ. ІНЦИДЕНТНІСТЬ ТОЧКИ ТА ПРЯМОЇ.

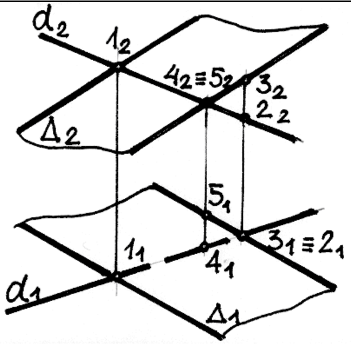
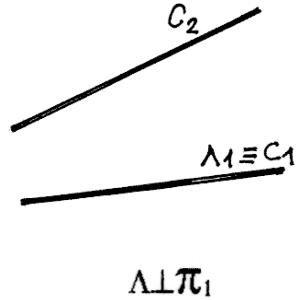
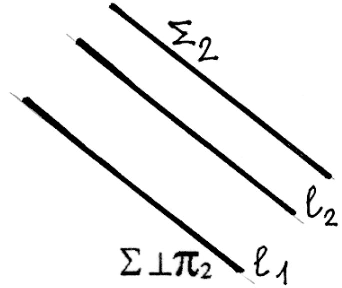
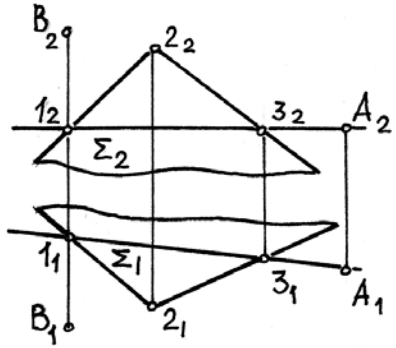
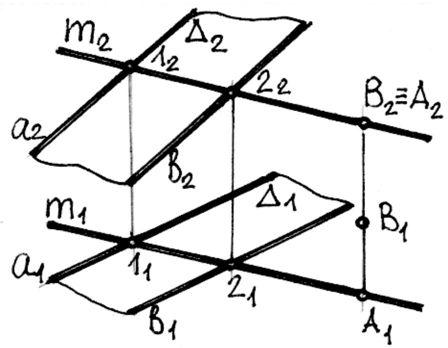
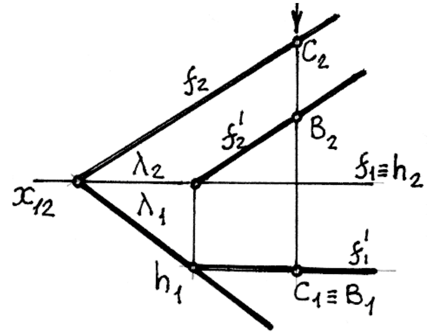
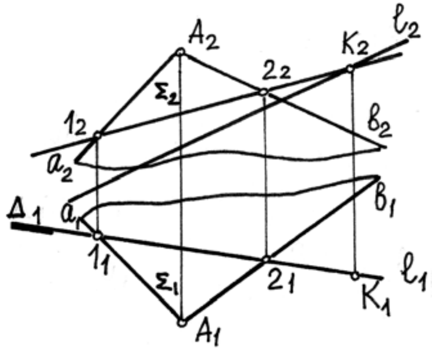
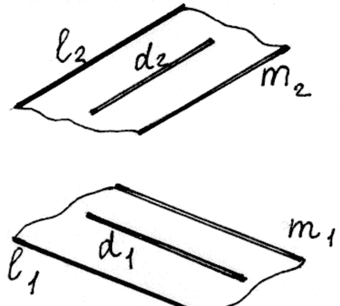
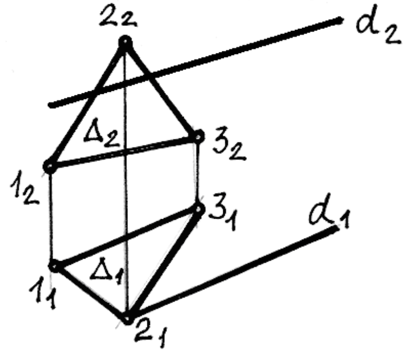
№ № п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть пряму загального положення, яка по мірі наближення до $П_2$ підіймається (висхідна пряма загального положення).			
II	Укажіть пряму рівня, у якої всі точки розташовані на однакових відстанях від $П_3$.			
III	Покажіть проекційну пряму, точка B (B_1,B_2) якої проекціюється на площину $П_2$ невидимою			

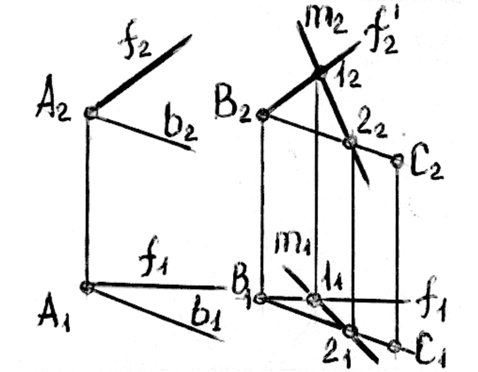
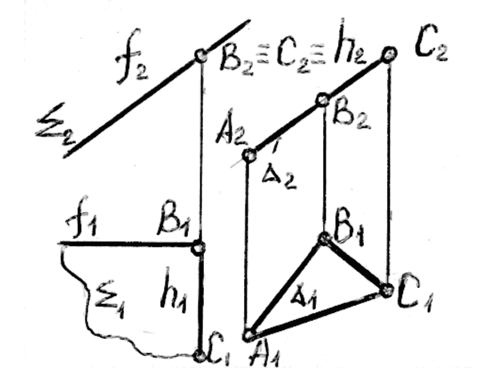
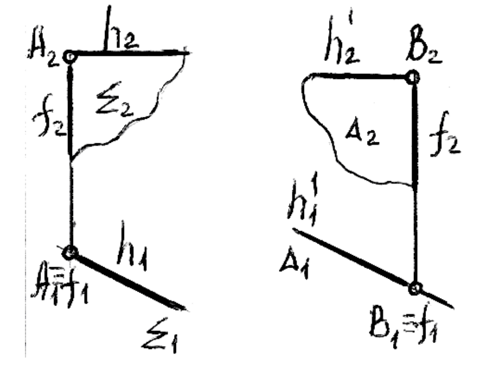
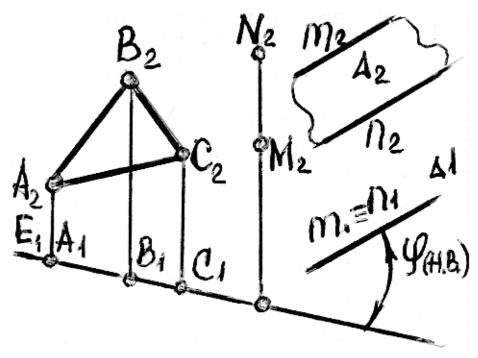
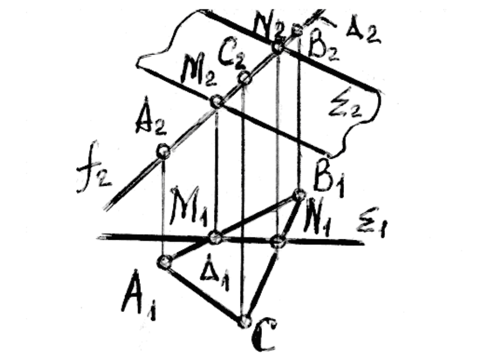
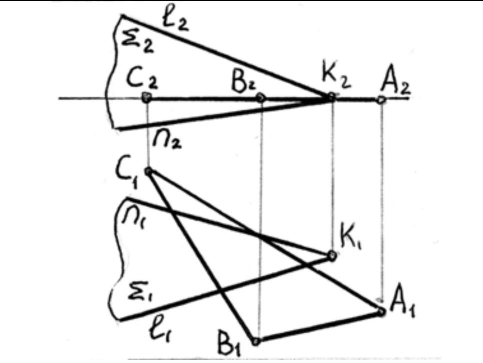
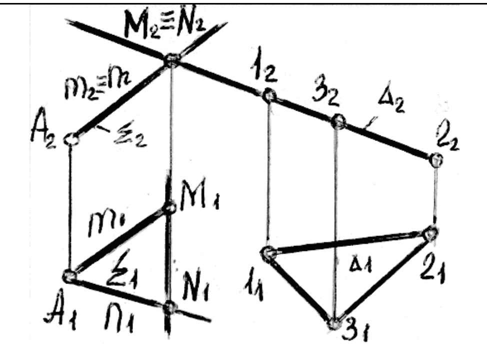
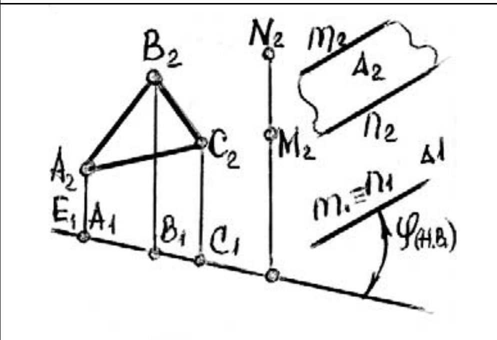
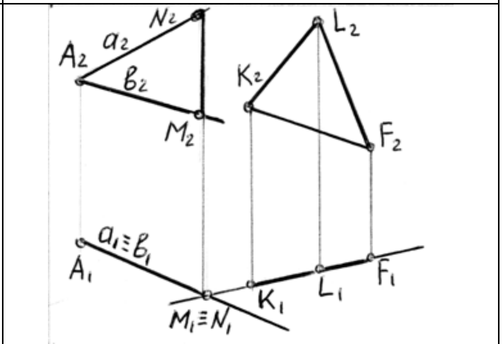
<table>
<tr><td colspan="5">КАРТА №5 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТЕМА: ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ. ПОДІЛ ВІДРІЗКА У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ ТА ЙОГО СПРАВЖНЯ ВЕЛИЧИНА</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№ п/п</td><td rowspan="2">ЗАПИТАННЯ</td><td colspan="3">ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>I</td><td>Покажіть дві прямі, які не лежать в одній площині.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>II</td><td>Укажіть варіант відповіді, де показано, що через 4 точки, які не лежать в одній площині, не можна провести дві прямі, що перетинаються.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>III</td><td>На якому з варіантів відповідей раціонально застосований спосіб прямокутного трикутника для визначення справжніх довжин декількох відрізків, що виходять з однієї точки</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5">КАРТА №6 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТЕМА: ЕЛЕМЕНТАРНІ ПОЗИЦІЙНО-МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№
п/п</td><td rowspan="2">ЗАПИТАННЯ</td><td colspan="3">ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>I</td><td>Покажіть, для рішення якої з трьох наданих задач потрібні профільні проекції прямих. (через точку С проведена пряма, що перетинає АВ та одну з осей проекцій)</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>II</td><td>Покажіть задачу, в якій пряма b паралельна прямій $a(a_1,a_2)$ і перетинає відрізок АВ в точці Е на відстані 30 мм від точки А.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>III</td><td>Покажіть дві мимобіжні прямі, відрізки яких проектуються на профільну площину $П_3$ в натуральну величину.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

КАРТА №7 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: КРЕСЛЕНИК ПЛОЩИНИ. ЗАДАЧІ НА ІНЦИДЕНТНІСТЬ.				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть площину, у якої на $П_1$ і $П_2$ видно одну і ту саму «лицьову» поверхню.			 S (S1,S2) – лінія нахилу площини
II	Укажіть варіант відповіді, на якому точка А належить проекційній площині та задана однозначно.			
III	Покажіть площину, яка є геометричним місцем фронталей даного рівня.			

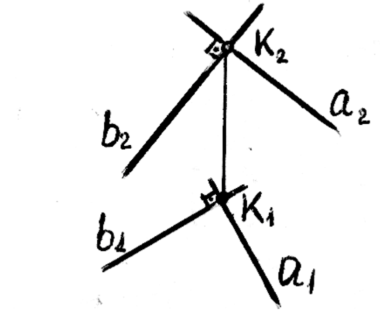
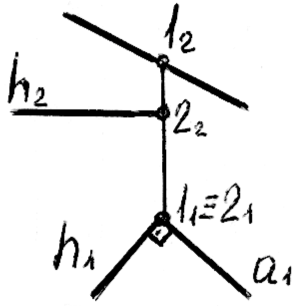
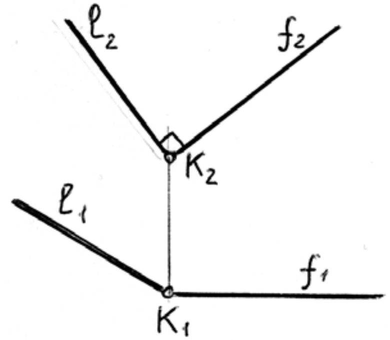
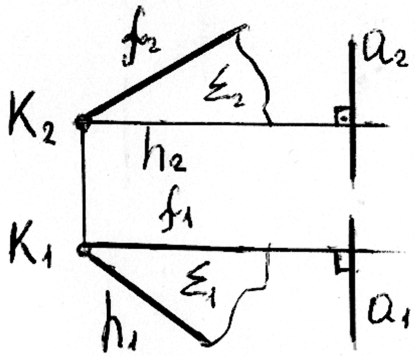
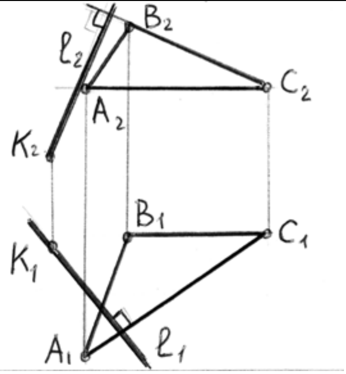
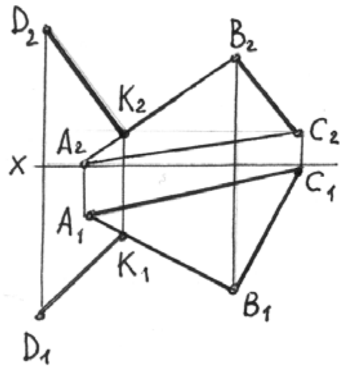
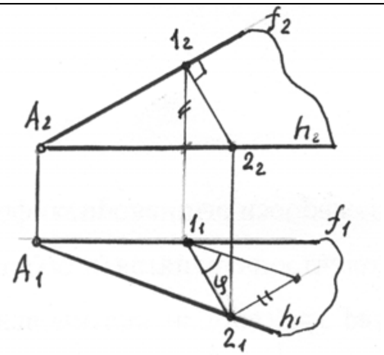
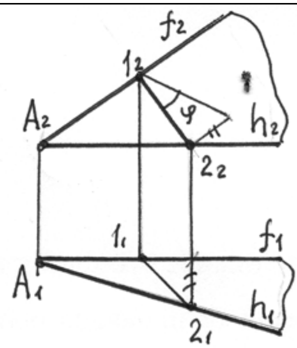
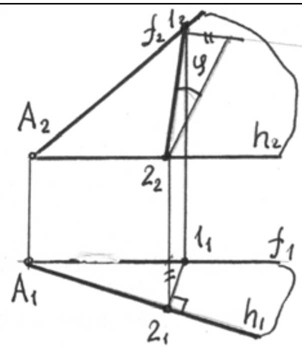
КАРТА №8 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ПОЗИЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ.				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть задачу, в якій двічі розв’язується елементарна задача на перетин прямої з проекційною площиною.			
II	Покажіть задачу, в якій виконується алгоритм розв’язання задачі на перетин прямої з площиною в загальному випадку.			
III	Покажіть задачу, в якій алгоритм розв’язання задачі на перетин прямої з площиною виконується двічі.			

КАРТА №9 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ПОЗИЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ.				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть пряму, яка належить даній площині і задана однозначно.			
II	Укажіть варіант відповіді, на якому точка В розташована за площиною			
III	Покажіть пряму, яка перетинає дану площину.			

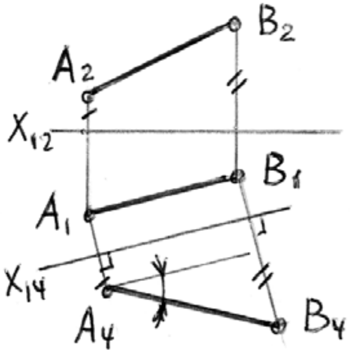
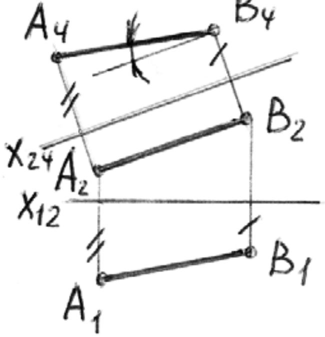
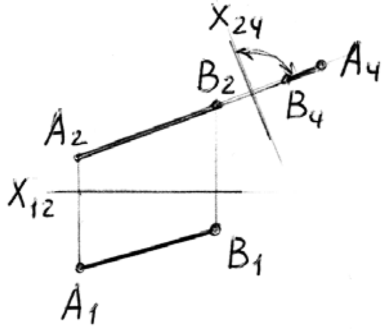
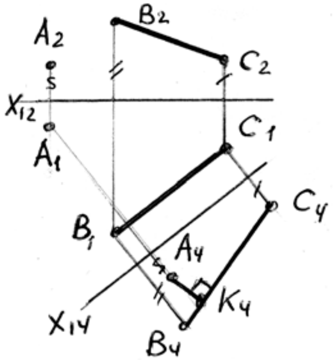
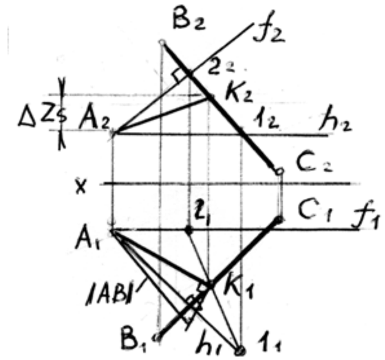
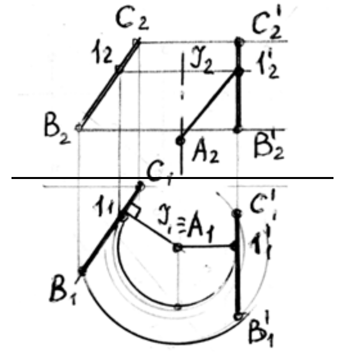
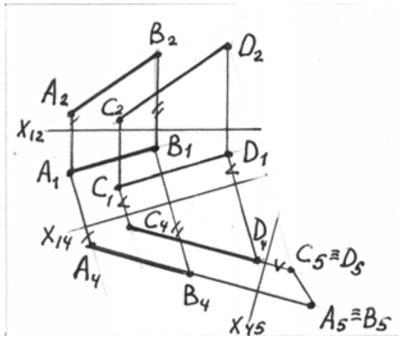
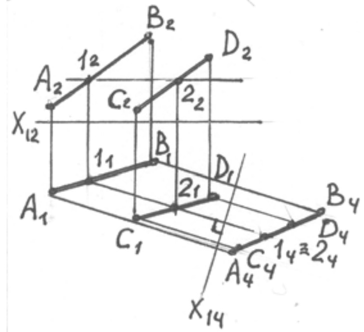
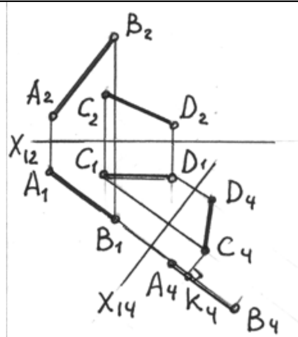
КАРТА №10 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПЛОЩИН				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	На якому кресленику відстань між площинами проектується на П2 в дійсну величину			
II	На якому кресленику лінія перетину площин є горизонталлю			
III	Вкажіть на якому кресленику кут між площинами проектується в натуральну величину на П2			

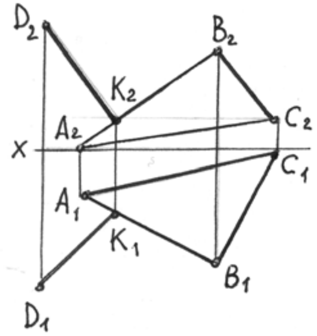
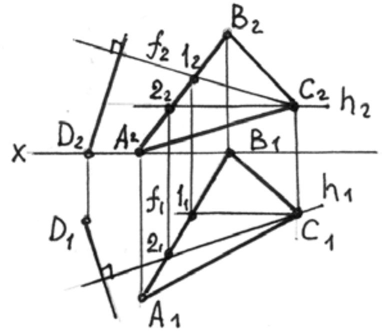
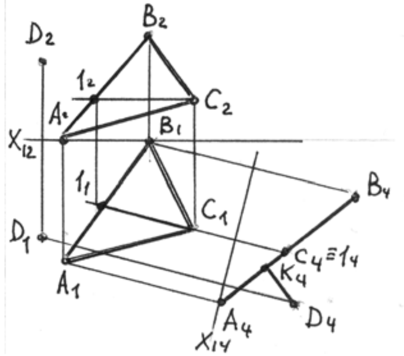
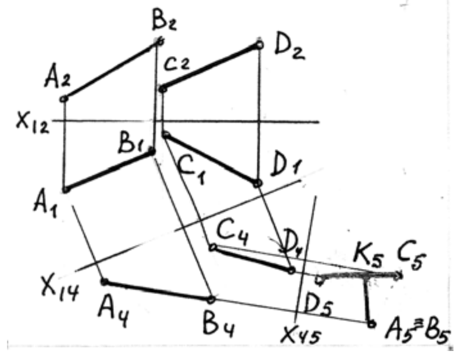
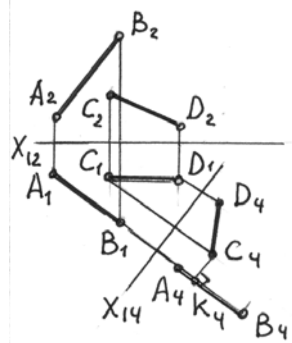
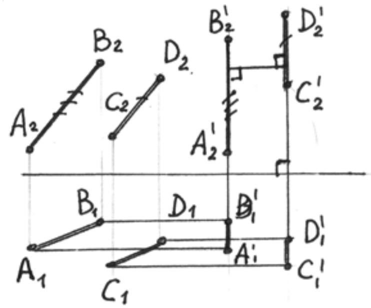
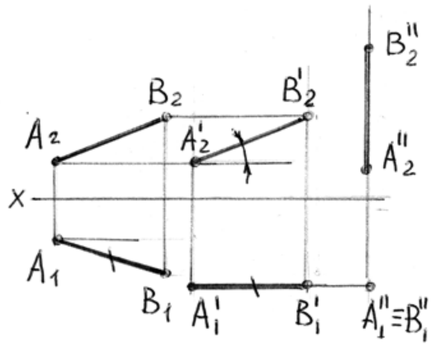
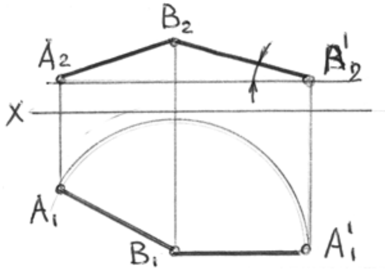
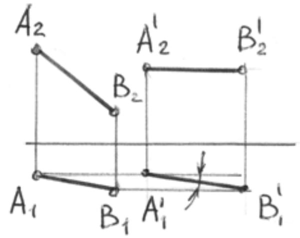
КАРТА №11 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

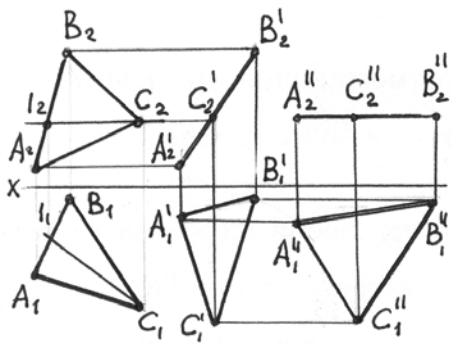
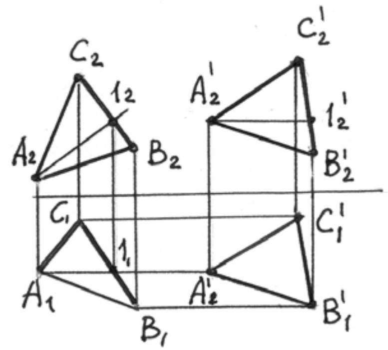
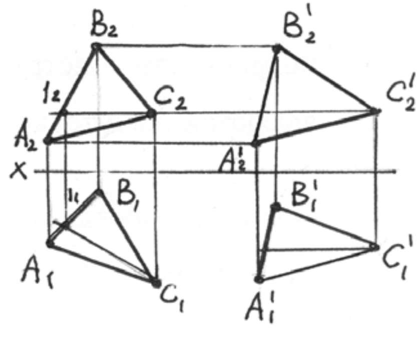
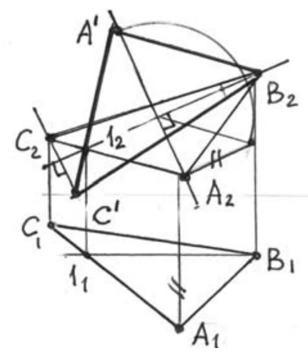
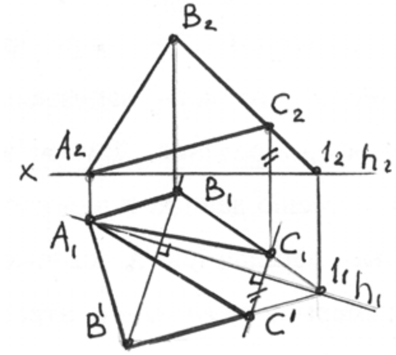
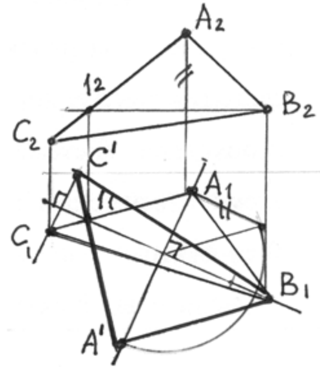
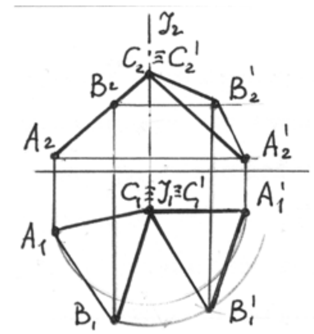
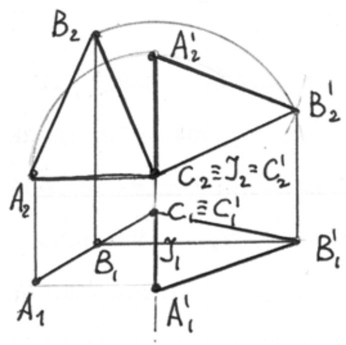
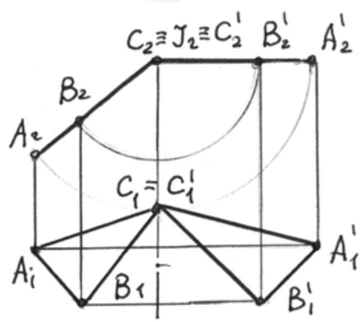
ТЕМА: ПРОЕКТУВАННЯ ПРЯМОГО КУТА. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДО ПЛОЩИНИ. ВЗАЄМНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН.

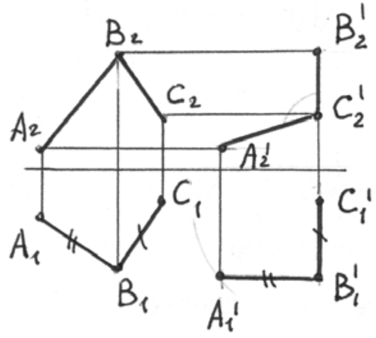
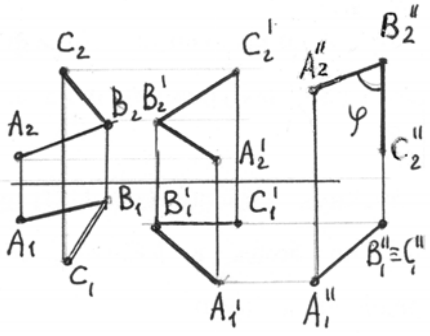
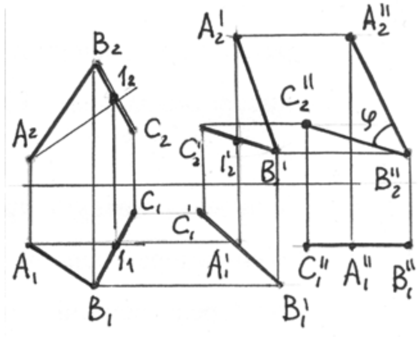
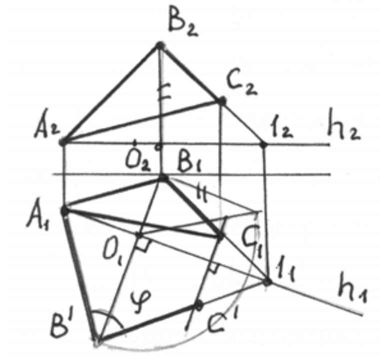
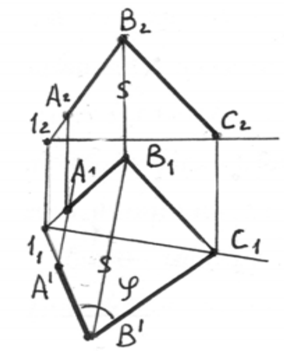
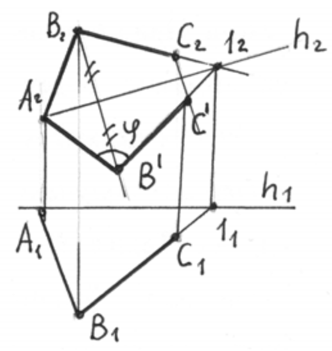
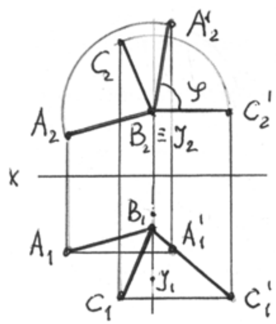
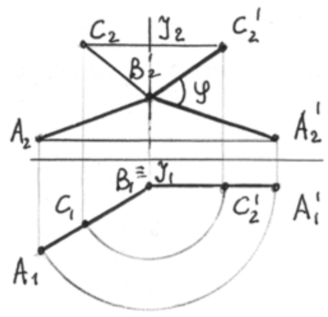
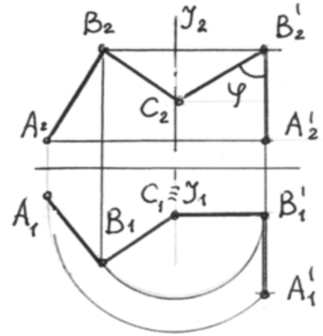
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	На якому кресленику прямі перетинаються у просторі під прямим кутом			
II	На якому кресленику пряма перпендикулярна до заданої площини			
III	На якому кресленику визначена дійсна величина кута нахилу площини до П2			

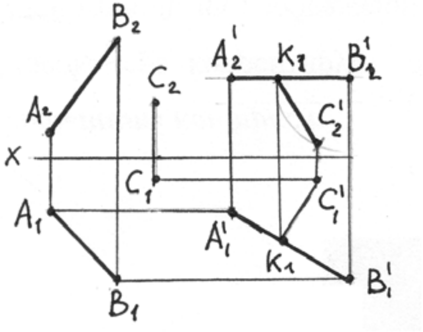
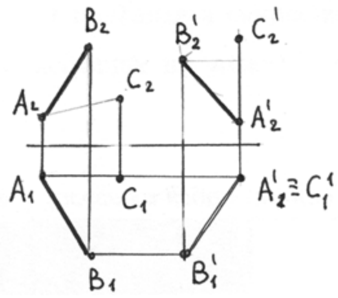
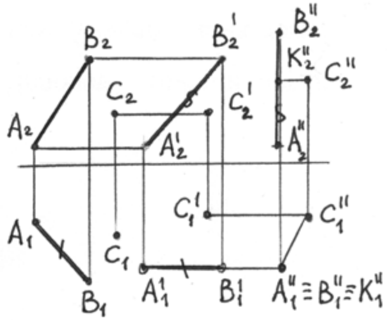
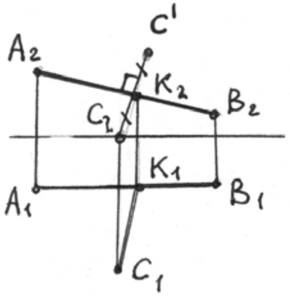
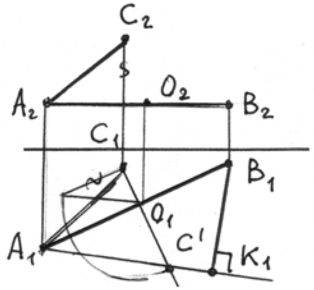
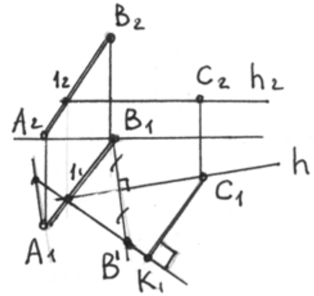
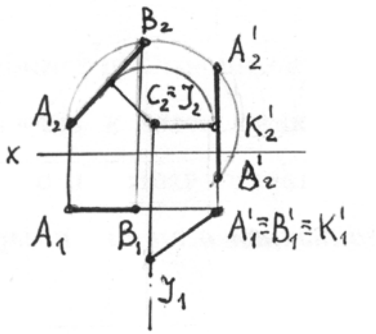
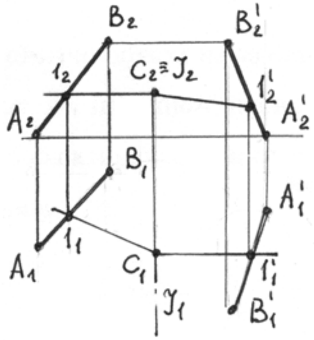
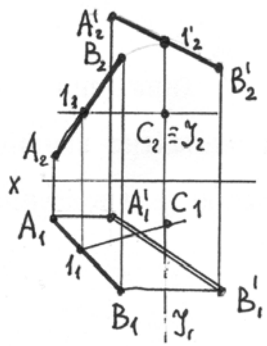
КАРТА №12 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТЕМА: ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	На якому кресленику вірно визначено кут нахилу прямої до $П_2$.			
II	На якому кресленику визначена дійсна величина відстані від точки А до відрізка ВС.			
III	На якому кресленику визначена дійсна величина відстані між АВ і СD.			

<table>
<tr><td colspan="5">КАРТА №13 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТЕМА: ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№
п/п</td><td rowspan="2">ЗАПИТАННЯ</td><td colspan="3">ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>I</td><td>На якому кресленику знайдено дійсну величину відстані від точки до площини.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>II</td><td>На якому кресленику визначена відстань між мимобіжними прямими.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td>III</td><td>На якому кресленику знайдено кут нахилу прямої до $П_2$</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

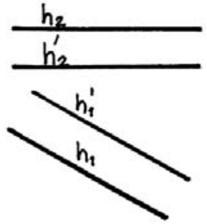
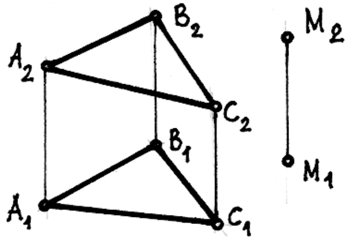
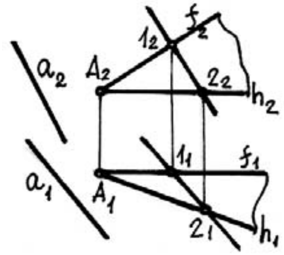
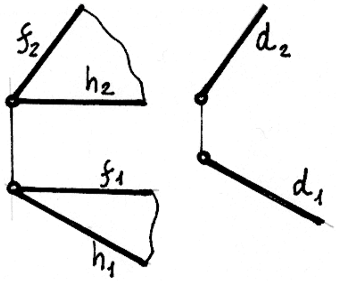
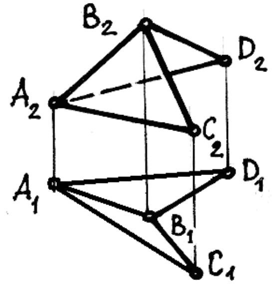
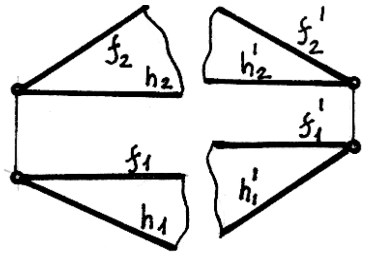
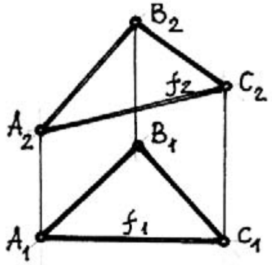
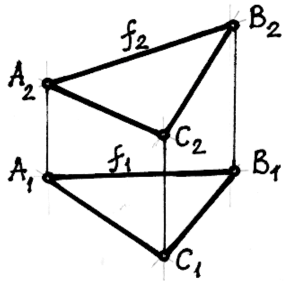
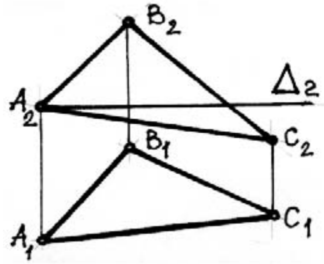
КАРТА №14 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	На якому кресленику знайдено дійсну величину трикутника методом плоско-паралельного переміщення?			
II	На якому кресленику знайдено дійсну величину трикутника обертанням навколо горизонталі?			
III	На якому кресленику знайдено дійсну величину трикутника методом обертання навколо проектуючої прямої?			

КАРТА №15 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	На якому кресленику знайдено дійсну величину кута між прямими методом плоско-паралельного переміщення			
II	На якому кресленику знайдено дійсну величину кута між прямими методом обертання навколо прямої рівня			
III	На якому кресленику знайдено дійсну величину кута між прямими методом обертання навколо проектуючої прямої			

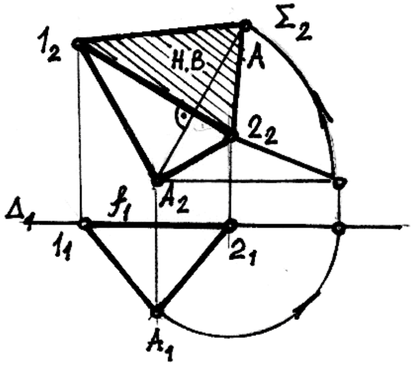
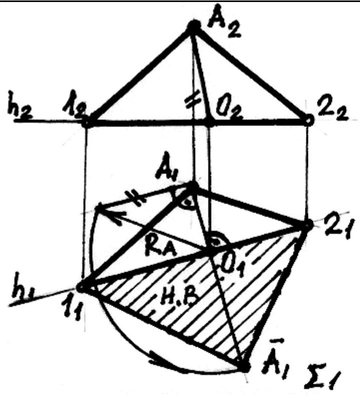
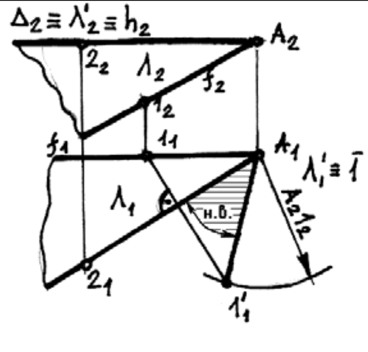
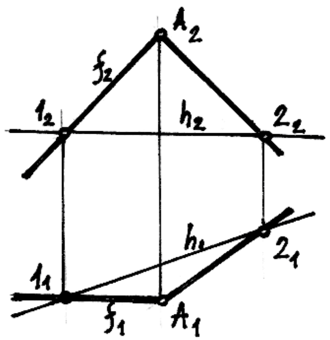
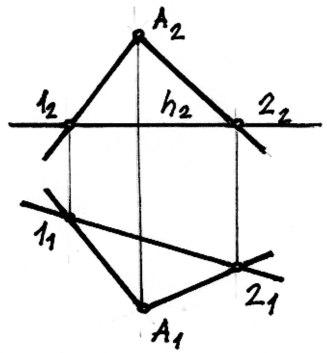
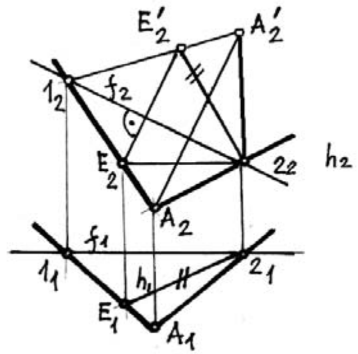
КАРТА №16 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	На якому кресленику знайдено відстань від точки до прямої методом плоско-паралельного переміщення			
II	На якому кресленику знайдено відстань від точки до прямої методом обертання навколо лінії рівня			
III	На якому кресленику знайдено відстань від точки до прямої методом обертання навколо проектуючої прямої			

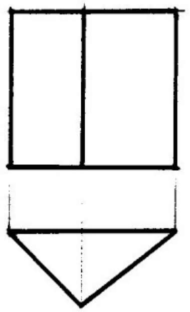
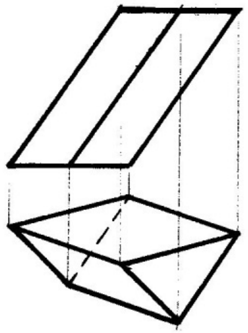
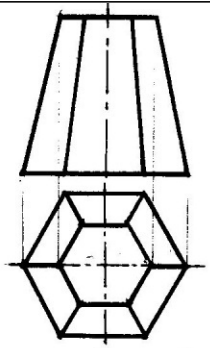
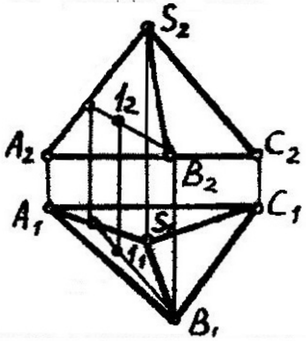
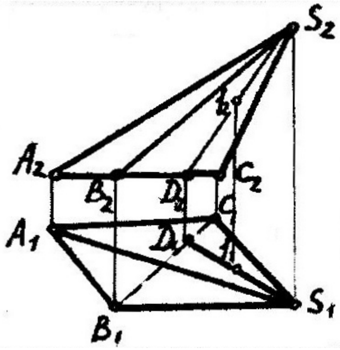
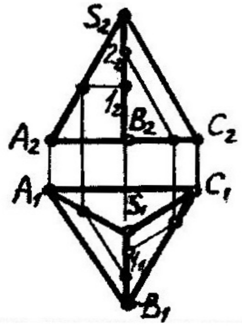
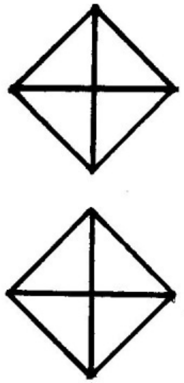
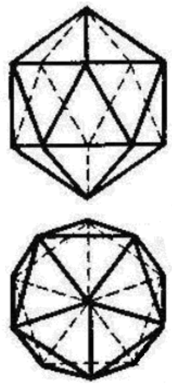
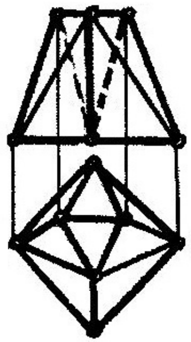
КАРТА №17 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

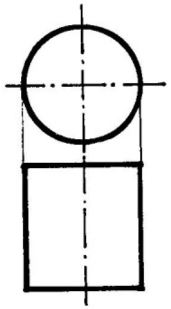
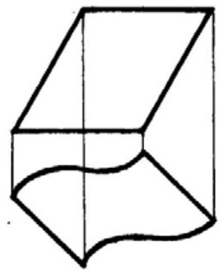
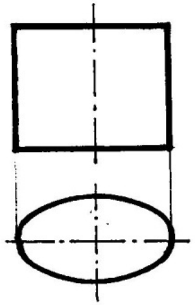
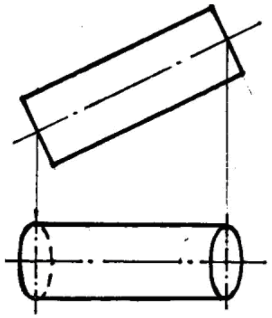
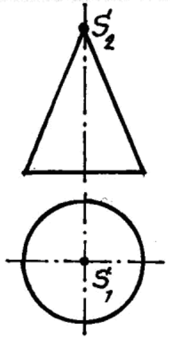
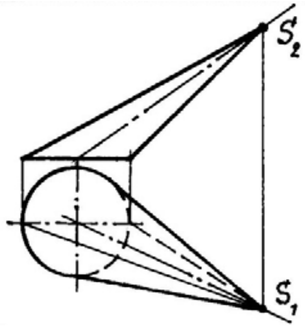
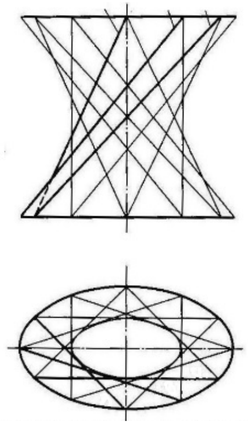
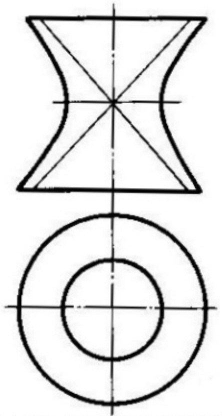
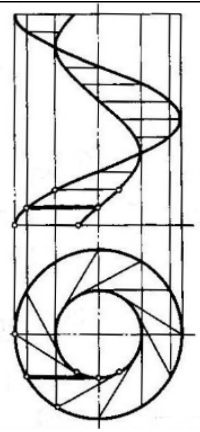
ТЕМА: МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ЯКІ РОЗВ'ЯЗУЮТЬСЯ СПОСОБАМИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ.

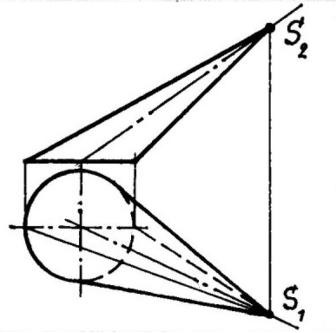
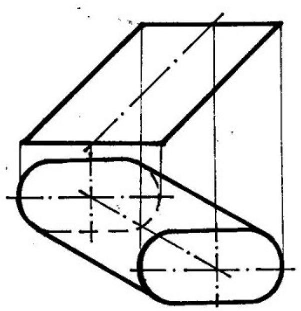
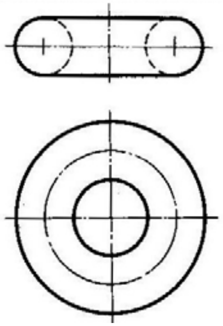
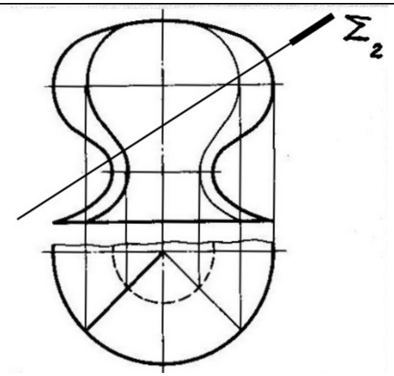
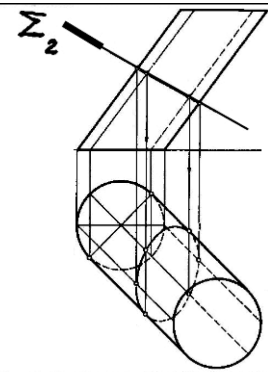
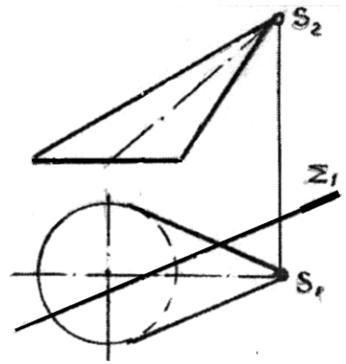
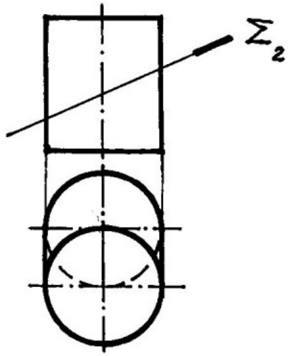
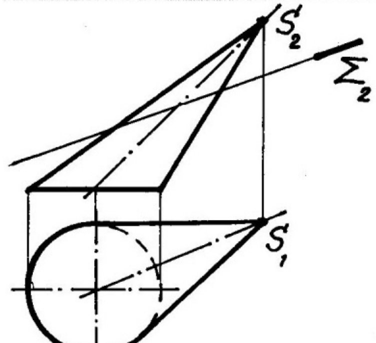
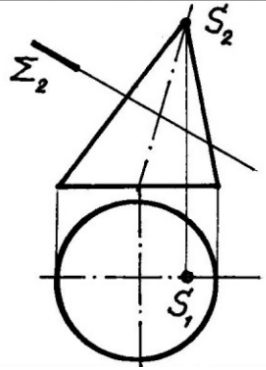
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть задачу, яка розв'язується заміною $П_2$ на $П_4 \perp П_1$, або обертанням навколо горизонтально-проекціюючої прямої.	Визначити відстань між двома паралельними прямими 	Визначити відстань від точки М до площини ΔАВС та кут β 	Визначити відстань від прямої до площини та кут β. 
II	Покажіть задачу яка розв'язується перетворенням прямої загального положення в пряму рівня, а потім в проекціюючу пряму	Визначити кут нахилу прямої до площини. 	Визначити натуральну величину двогранного кута. 	Визначити натуральну величину кута між двома площинами. 
III	Покажіть задачу в якій треба виконати обертання плоскої фігури навколо горизонталі.	Визначити діаметр кола, вписаного в трикутник 	В трикутнику АВС провести АК під кутом 60° до ВС 	Трикутник АВС сумістити з площиною Δ ‖П1 

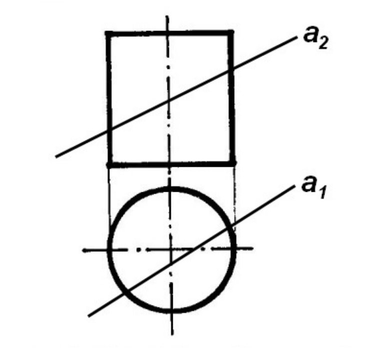
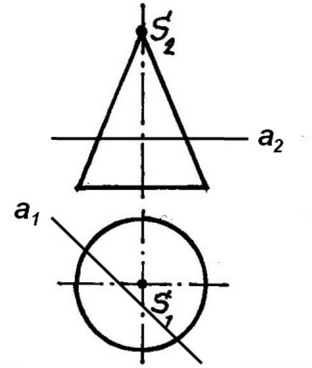
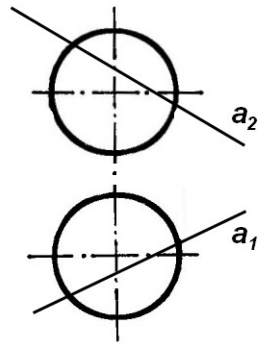
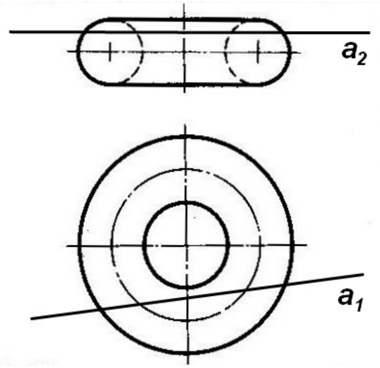
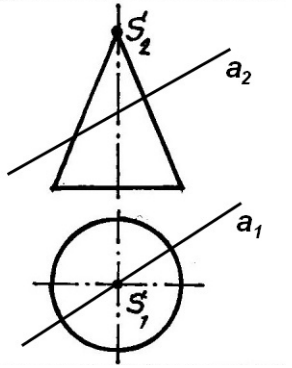
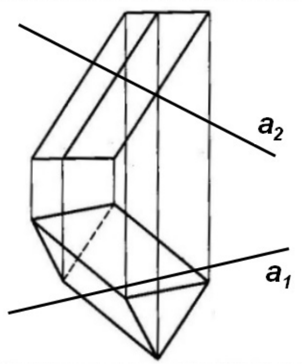
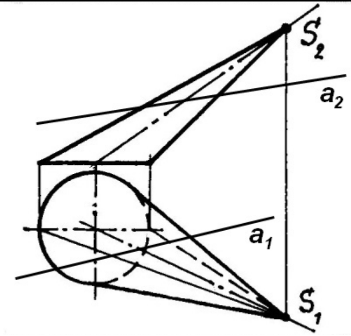
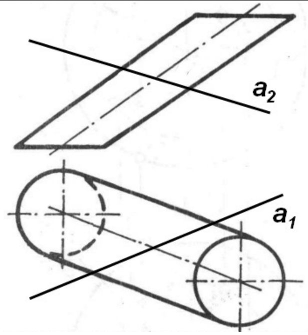
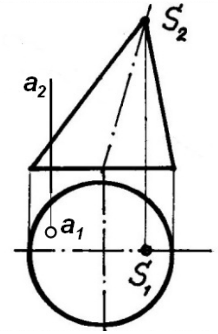
КАРТА №18 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ
ТЕМА: ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ПРЯМОЇ РІВНЯ

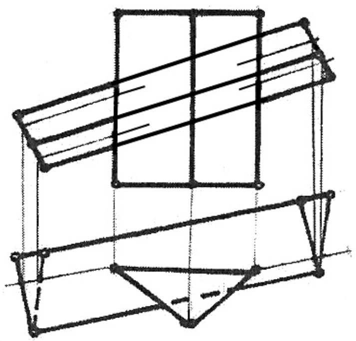
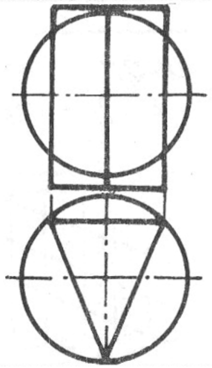
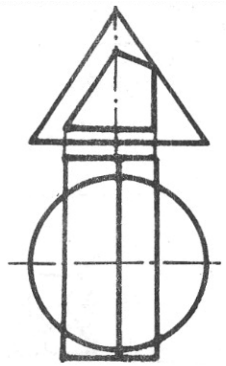
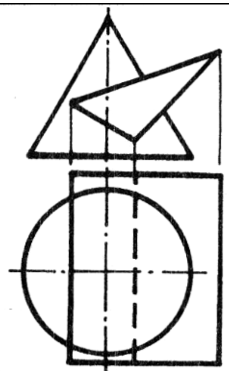
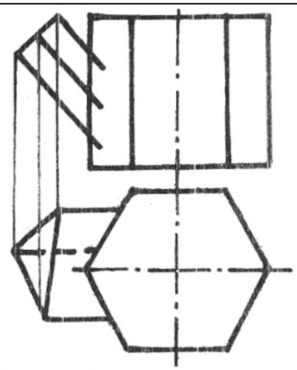
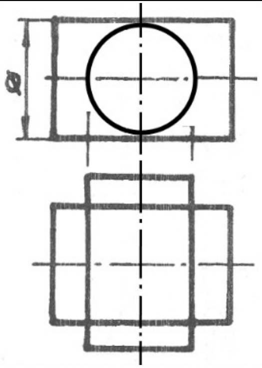
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть задачу, в якій суміщення кута 1А2 з відповідною площиною рівня виконано без визначення радіуса обертання вершини А (коло обертання вершини А лежить у фронтально проектціюючій площині).			
II	Покажіть задачу, в якій для визначення натуральної величини кута 1А2 обертанням навколо його прямої рівня (h), не треба визначати радіус обертання його вершини.			
III	Покажіть на раціональний спосіб визначення натуральної величини плоскої фігури загального положення	Послідовна заміна двох площин проекцій	Послідовне обертання навколо двох взаємно перпендикулярних проекціюючих прямих	Обертання навколо прямої рівня

КАРТА №19 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ЗОБРАЖЕННЯ МНОГОГРАННИХ ПОВЕРХОНЬ, ТОЧОК ТА ПРЯМИХ НА НИХ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть горизонтально-проекцію-ючу поверхню			
II	Покажіть креслення на якому побудована точка поверхні за допомогою прямої відомого напрямку			
III	Покажіть поверхню, яка складається з 20 рівносторонніх трикутників			

КАРТА №20 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: КОНТУР, ВИДИМІСТЬ, ГРАФІЧНО ПРОСТІ ЛІНІЇ ПОВЕРХНІ, ТОЧКИ НА НИХ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть горизонтально-проекціюючу поверхню			
II	Покажіть поверхню, в якій точки зміни видимості на $П_2$ знаходяться на верхній та нижній твірних, що проектуються на $П_1$ на вісь симетрії проекції			
III	Покажіть поверхню, у якої графічно простими лініями є паралелі та прямі, мимобіжні з віссю обертання поверхні			

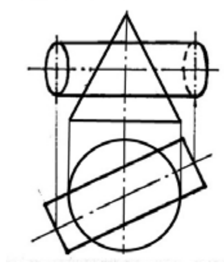
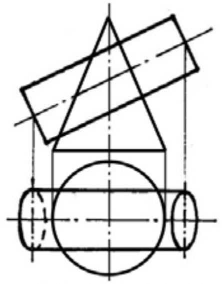
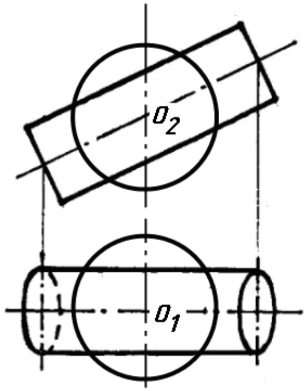
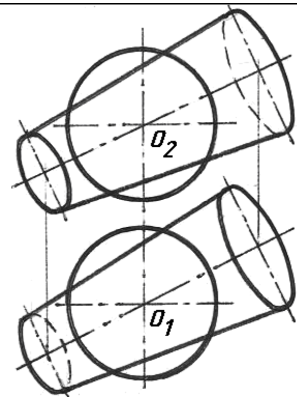
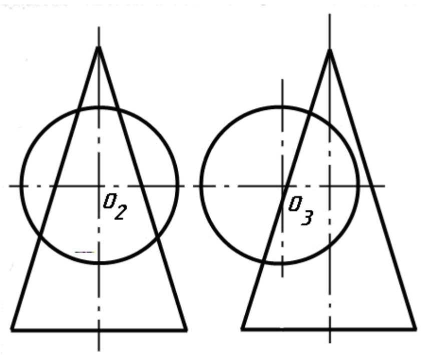
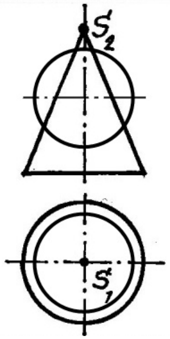
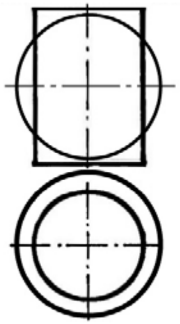
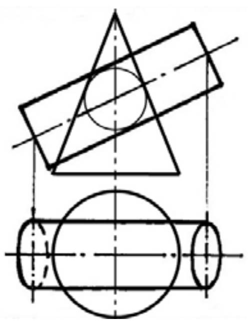
КАРТА №21 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть поверхню, для якої графічно простими лініями її перерізів площинами являються коло та дві прямі (твірні)			
II	Покажіть поверхню, в якої точки зміни видимості лінії перерізу її площиною завжди належать головному меридіану на Π_2 та завжди на екваторі на Π_1			
III	Покажіть поверхню, в якій найвища та найнижча точки перерізу співпадають з точками видимості на Π_2, а на Π_1 точок видимості немає, тобто вся горизонтальна проекція перерізу видима			

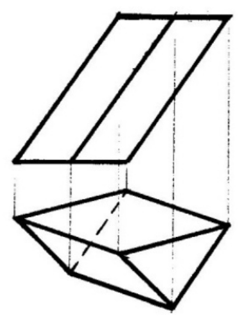
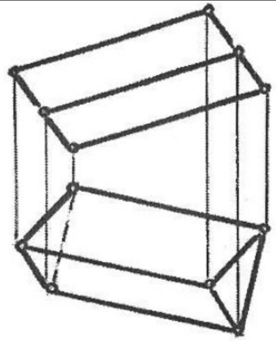
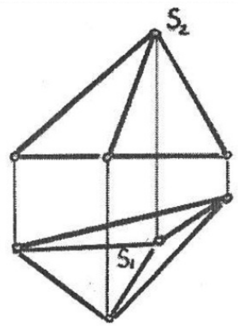
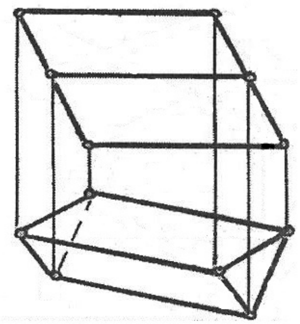
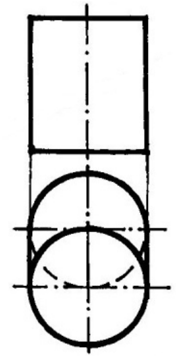
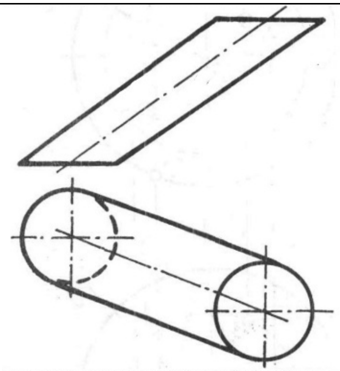
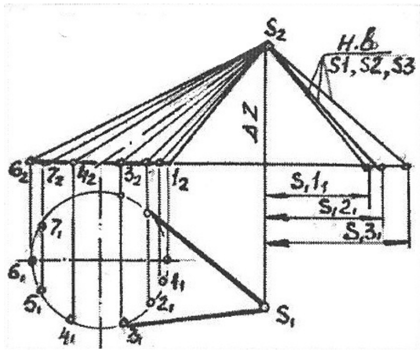
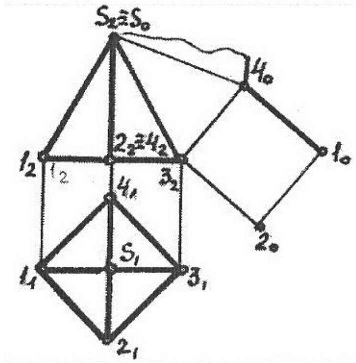
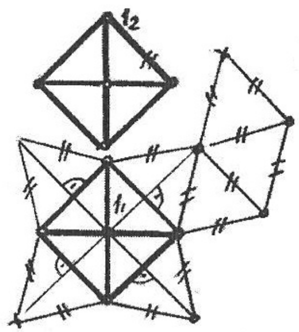
КАРТА №22 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ З ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть поверхню, для якої знаходження точок входу і виходу прямої а (a_1, a_2) не вимагає допоміжних побудов.			
II	Покажіть задачу, в якій точки входу і виходу прямої а (a_1, a_2) знаходять за допомогою горизонтальної площини, яка містить в собі цю пряму.			
III	Покажіть задачу, в якій точки перетину прямої а (a_1, a_2) з поверхнею знаходять за допомогою площини загального положення, яка містить в собі цю пряму та паралельна осі поверхні			

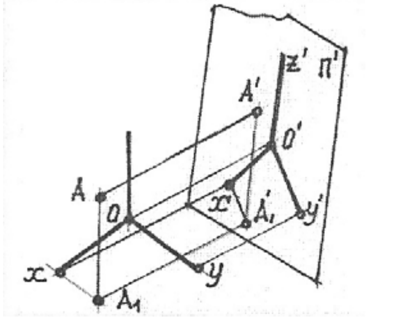
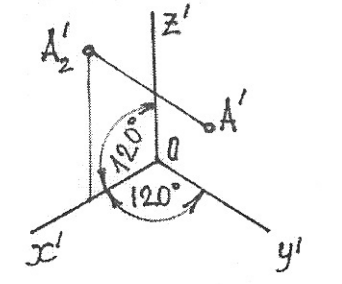
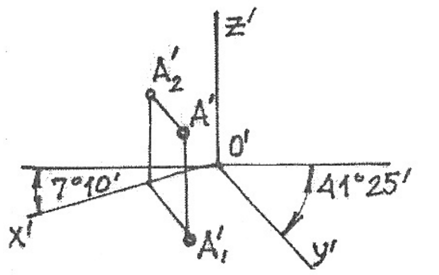
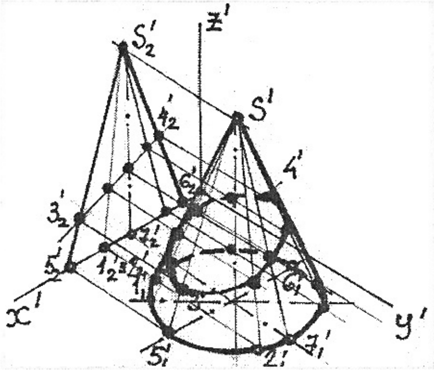
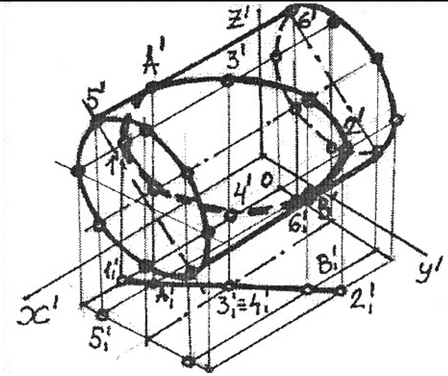
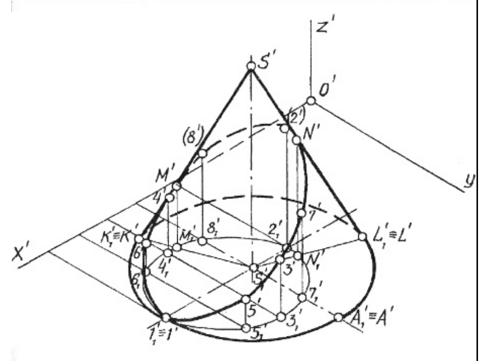
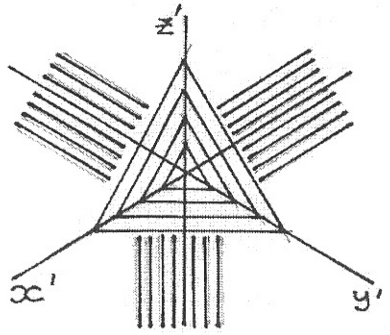
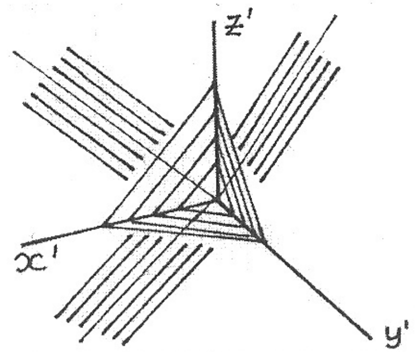
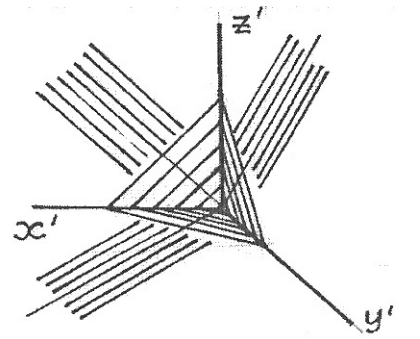
КАРТА №23 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Назвіть основну вимогу, якій повинна обов'язково відповідати поверхня посередник, що використовується у якості допоміж-ної при побудові лінії взаємного перетину поверхонь	Поверхня посередник повинна бути проекціюючою поверхнею	Поверхня посередник повинна бути площиною рівня	Поверхня посередник повинна перетинати данні поверхні по графічно простих лініях (колах або прямих)
II	Покажіть задачу, яка розв'язується за допомогою січних горизонтально проекціюючих площин			
III	Покажіть задачу, яка розв'язується за допомогою січних горизонтальних площин			

КАРТА №24 ДЛЯ САМОКОНТРОЮ

ТЕМА: ПОБУДОВА ЛІНІЇ ВЗАЄМНОГО ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ СПОСОБОМ СФЕР ТА ОСОБЛИВІ ВИПАДКИ ПЕРЕТИНУ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть задачу, в якій початкові дані мають три умови для побудови лінії перетину поверхонь способом концентричних сфер			
II	Покажіть задачу, в якій кола перетину соосних сфери та поверхні проектуються у відрізки прямих на площину проекцій, до якої їх спільна вісь паралельна			
III	Покажіть задачу, яка розв’язується на основі теореми Монжа			

КАРТА №25 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: РОЗГОРТКИ МНОГОГРАНИХ І КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть задачу, в якій розгортку поверхні раціонально виконати розкаткою			
II	Покажіть задачу, в якій розгортку поверхні раціонально виконати за допомогою її нормального перерізу			
III	Покажіть задачу, в якій натуральну довжину відрізків для побудови розгортки поверхні раціонально визначати способом прямокутного трикутника на фронтальній площині проекцій			

КАРТА №26 ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ТЕМА: АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ – ОДНОКАРТИННІ КРЕСЛЕННЯ				
№ п/п	ЗАПИТАННЯ	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ		
		1	2	3
I	Покажіть аксонометричну проекцію точки А, побудовану з використанням її вторинної фронтальної проекції			
II	Покажіть аксонометричну проекцію поверхні, для якої точки зміни видимості її перерізу знайдені за допомогою вторинних горизонтальних проекцій нарисних твірних поверхні			
III	Покажіть напрям штриховки перерізів двох сумісних деталей в прямокутній діметрії			

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКИЙ СЛОВНИК ДЕЯКИХ ТЕРМІНІВ

Або – или, либо
Адже – ведь, небось
Але – но
Аніж – чем, нежели
Аркуш – лист (бумаги)
Безліч – множество, много
Безперервний – непрерывный
Безпосередній – непосредственный
Бічна поверхня – боковая поверхность
Близькість – близость
Будь-який – какой-нибудь, любой
Вгору – вверх
Великий – большой
Вздовж – вдоль
Вигляд – вид
Видимість – видимость
Визначати – определять
Визначник поверхні – определитель поверхности
Виконання – выполнение
Випадковий – случайный
Вираз – выражение
Висновок – заключение
Висхідний – восходящий
Віддалений – отстоящий, удаленный
Віддаль – расстояние
Від'ємний – отрицательный
Відкласти – отложить
Відлік – отсчет
Відносний – относительный
Відношення – отношение
Відображення – отображение
Відповідь – ответ
Відрізок – отрезок
Відстань – расстояние
Вісь – ось
Властивість – свойство
Внаслідок – вследствие
Вплив – влияние
Вправа – упражнение
Всередині – внутри
Вступ – введение
Втілити – выполнить, воплотить
Вузол – узел
Вчасно – своевременно
Г. двопорожнинний – гиперболоид двуполостной
Геометричне місце – геометрическое место
Гіперболоїд – гиперболоид
Головні осі – главные оси
Граничні умови – граничные условия
Графічне розв'язування – графическое решение
Джерело – источник
Дільник – делитель
Дія – действие
Добуток – произведение
Доведення – доказательство
Довжина – длина
Довільний – произвольный
Догори – вверх
Додавання – сложение
Додатковий – дополнительный
Доказ – доказательство
Допоміжне проекціювання – вспомогательное проецирование
Дорівнює – равняется
Дослідження – исследование
Дотик – касание
Жмуток – пучок
Завдовжки – длиной, в длину
Завжди – всегда
Загальновідомий – общеизвестный
Зайвий – лишний
Залежність – зависимость
Заміна – замена
Заперечення – отрицание
Запитання – вопрос
Засіб – средство
Застосування – применение
Збіг – совпадение
Збігатися – совпадать
Здобутий – полученный
З'єднувати – соединять
Зменшення – уменьшение
Зміст – содержание
Знаменник – знаменатель

Зображення – изображение
Зовні – вне
Зовнішній – внешний
Зокрема – в частности
Зразковий – образцовый
Зрізаний – усеченный
Зрозумілий – понятный
Зростання – возрастание
Імовірний – возможный
Інколи – иногда
Іспит – испытание, экзамен
Кількість – количество
Кожний – каждый
Коло – окружность
Комірка – ячейка
Користування – пользование
Кресленик – чертёж
Куля – шар
Кут – угол
Ламана – ломаная
Ланка – звено
Лінійчата – линейчатая
Літера – буква
Лічити – считать
Мати – иметь
Межа – граница
Метричний – метрический
Многокутник – многоугольник
Множення – умножение
Множина – множество
Множник – множитель
Можливість – возможность
На підставі – на основании
Наближене значення – приближенное значение
Навколо – вокруг, кругом
Навчальний – учебный
Наочний – наглядный
Наприклад – например
Напрям – направление
Напрямна – направляющая
Нарис – очерк
Нарисна геометрія – начертательная геометрия
Наслідок – следствие
Нахил – наклон
Наявність – наличие
Незалежний – независимый
Необмежений – неограниченный
Непарний – нечетный
Неперервний – непрерывный
Непрозорий – непрозрачный
Нерівність – неравенство
Нескінченність – бесконечность
Обвід – обвод
Обвідна – огибающая
Обертання – вращение
Об'єднання – объединение
Обмежений – ограниченный
Оборотний – обратимый
Обрис – очертание
Обхід – обход
Одержати – получить
Одноманітний – однообразный
Одночасно – одновременно
Ознака – признак
Окреме положення – частное положение
Опуклий – выпуклый
Останній – последний
Отвір – отверстие
Очна – секущая
Папір – бумага
Парний – четный
Певний – определенный
Переважно – преимущественно
Перенесення – перенос
Переріз – сечение
Перетворення – преобразование
Перетин – пересечение
Питання – вопрос
Побудова – построение
Повертати – поворачивать
Поверхня – поверхность
Поверхня розгортна – поверхность развертываемая
Подібні фігури – подобные фигуры
Повздовжній – продольный
Позитивно – положительно
Позиційний – позиционный
Позначка – отметка
Показник спотворення – показатель искажения

Помилка – ошибка
Попередньо – предварительно
Порівняння – сравнение
Порожнина – полость
Послідовність – последовательность
Потрібний – нужный
Похідна – производная
Початок – начало
Поширення – распространение
Приблизно – примерно
Приклад – пример
Проекціювання –проецирование
Проміжок – промежуток
Промінь – луч
Проникнення – проницание
Простір – пространство
Просторова уява – пространственное воображение
Прямолінійні твірні – прямолинейные образующие
Риска – черта
Рисунок – чертеж (рисунок)
Рівень – уровень
Рівність – равенство
Рівняння – уравнение
Різниця – разность
Робити – делать
Розв'язання – решение
Розгортка – развертка
Розташування – размещение
Рух – движение
Січна – секущая
Складений – сложенный
Складний – сложный
Слід – след
Співвідношення – соотношение
Спільний – общий
Сполучення – соединение
Спосіб – способ
Спотворення – искажение
Стикання – соприкасание
Сукупність – совокупность
Суміжний – смежный
Сумісний – совместный
Суміщення – совмещение
Суттєво – существенно
Суцільний – сплошной
Твердження – утверждение
Твірна – образующая
Тлумачити – толковать
Треба – надо, нужно
Угнутість – вогнутость
Умова – условие
Упорядкований – упорядоченный
Урізування – врезание
Утворення – образование
Ухил – уклон
Уявлюваний – воображаемый
Уявний – мнимый
Хай – пускай
Хвилястий – волнистый
Хибний – ложный
Хіба – разве, неужели
Хоч – хоть, хотя
Це – это
Центр кривини – центр кривизны
Цілком – полностью, вполне
Чарунка – ячейка
Час – время
Частка – доля
Чинник – фактор
Чисельник – числитель
Чіткий – чёткий, отчётливый
Шар – слой
Швидкість – скорость
Шукана – искомая
Ще – ещё
Що – что
Щоб – чтобы
Щодо – относительно, насчет
Що-небудь – что-нибудь, что-либо
Щось – что-то
Якби – если бы, когда бы
Який-небудь – какой-нибудь
Якість – качество
Якраз – как раз
Як-то – а именно, например

Навчальне видання

ЛУСЬ Володимир Іванович
КИРКАЧ Тетяна Євгенівна
МАНДРІЧЕНКО Олена Євгенівна
РАДЧЕНКО Алла Олександрівна

ПРАКТИКУМ З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск: *Т. Є. Киркач*

За авторською редакцією

Комп'ютерний набір та верстання: *С. М. Швидкий*

Підп. до друку 25.04.2013 Формат 60х90/8
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 10,0
Зам.№ Тираж 300 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.